Appunti di GTD

Luca Bruni
Viola Giovannini

17 settembre 2018

Indice

Capitolo 1

Teoria delle curve

1.1 Prime proprietà ed esempi sulle curve

Per tutta la durata del corso il nostro spazio ambiente sarà $(\mathbb{R}^3, <, >)$, ovvero lo spazio euclideo tridimensionale dotato del prodotto scalare standard e della norma euclidea.

Definizione 1.1 *Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^k$ e sia $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$; f è detta **funzione C^∞ su un aperto** se ogni sua componente ammette tutte le derivate parziali di ogni ordine (ha senso parlarne perché Ω è aperto).*

Definizione 1.2 *Sia $X \subseteq \mathbb{R}^n$ sottoinsieme qualsiasi e sia $f : X \to \mathbb{R}^n$; f è detta **funzione C^∞** se $\forall p \in X$ esistono un aperto U_p di $\mathbb{R}^k$ che contiene p e una funzione $F : U_p \to \mathbb{R}^n$ che è C^∞ tale che $f_{|X\cap U_p} = F_{|X\cap U_p}$. Una funzione che verifica tale proprietà è detta anche **funzione liscia***

Definizione 1.3 *Una funzione C^∞ $f : I \to \mathbb{R}^3$ con I intervallo generico di $\mathbb{R}$ è detta **curva**. L'immagine della curva $f(I)$ è detto **supporto** e la derivata prima $f' : I \to \mathbb{R}^3$ è chiamata **velocità**. Per indicare una curva si utilizzano per lo più le lettere greche.*

Esempi:

Elica circolare retta: $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ tale che $\gamma(t) = (R\cos t, R\sin t, a)$ con $R > 0$, $a \in \mathbb{R}$. Capire come si disegna una curva parametrica. Il supporto è la figura rappresentata mentre la velocità vale $\gamma'(t) = (-R\sin t, R\cos t, a)$ il cui modulo è costante e vale $\sqrt{R^2 + a^2}$;

Cuspide: $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ tale che $\gamma(t) = (t^2, t^3, 0)$. Il supporto è la figura rappresentata a fianco. La sua velocità vale $\gamma'(t) = (2t, 3t^2, 0)$ e dunque $\|\gamma'(t)\| = |t|\sqrt{4 + 9t^2}$ che si annulla se e solo se $t = 0$. Notiamo che nonostante la curva sia C^∞ il suo supporto presenta una patologia nel punto $(0, 0, 0)$, punto in cui la velocità è nulla. Vedremo che i punti problematici si presentano quando una curva si ferma per un certo periodo di tempo (che può essere anche un solo istante) e poi riparte. In questo modo ne perdiamo il comportamento locale.

Cicloide: La curva cicloide è la curva descritta da un punto che appartiene ad una ruota nel momento in cui questa rotola senza strisciare. Grazie a questa proprietà, dopo che la ruota ha percorso uno spazio t si forma tra il punto iniziale e la nuova posizione esattamente un angolo che misura t radianti. Possiamo pertanto descrivere la curva con $\gamma(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t, 0)$. Il supporto è quello disegnato, la sua velocità vale $\gamma'(t) = (1 - \cos t, \sin t, 0)$ e dunque $\|\gamma'(t)\| = 2\sin\frac{t}{2}$. La velocità è dunque 0 per ogni $t = 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$.

Definizione 1.4 *Una curva $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ C^∞ si dice **regolare** se $\gamma'(t) \neq 0$ $\forall t \in I$*

Tra gli esempi visti in precedenza soltanto l'elica è regolare, mentre la cuspide e la cicloide non lo sono. Da qui in avanti non specificheremo più il fatto di essere C^∞ in quanto in questo corso ci occuperemo esclusivamente di questo tipo di curve.

Esercizio 1.1.1 *Il supporto della cuspide non è il supporto di una curva regolare, non importa dunque quale parametrizzazione uso (varrà in generale)*

Soluzione: Prendiamo una parametrizzazione qualsiasi della cuspide $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), 0)$. $\gamma_1(t)$ ha un minimo locale in t_0 tale che $\gamma(t_0) = (0, 0, 0)$ e pertanto la sua derivata in quel punto si annulla. Inoltre vale la relazione $\gamma_2(t) = \pm\sqrt{\gamma_1(t)^3}$ e pertanto in un intorno di t_0 si ha che $|\gamma_2(t)| < |\gamma_1(t)|$; Quindi $\gamma_2(t)$ cresce più lentamente di $\gamma_1(t)$ e dunque la derivata $\gamma_2'(t_0) = 0$ poiché $\gamma_1'(t_0) = 0$. Le componenti della velocità sono nulle in t_0 e quindi la velocità è nulla in t_0.

Definizione 1.5 *Sia $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^3$; definiamo **lunghezza di** γ il numero $L(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\|dt$*

OSSERVAZIONE: Si può dimostrare che la definizione è equivalente a definire la lunghezza di una curva come

$$l(\gamma) = \sup_{n, a=t_0<\ldots<t_n=b} \sum_{i=0}^{n-1} \|\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)\|$$

ovvero come il sup di una poligonale che approssima la curva. Questa definizione si può applicare anche a funzioni più strane (non entra in gioco la derivata), ma può accadere che $l(\gamma) = \infty$. Le curve definite su un compatto per cui accade questa cosa prendono il nome di **curve non rettificabili**. Un esempio è un "seghetto" con i denti alti le punte dei denti messe nelle posizioni $(\frac{1}{2^n}, \frac{1}{n})$

OSSERVAZIONE: Per una curva $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ sono fatti equivalenti:

1. $\|\gamma'(t)\| = 1$ per ogni $t \in I$;

2. $L(\gamma_{|[a,b]}) = b - a$.

Definizione 1.6 *Una curva γ che verifica una delle condizioni precedenti si dice **parametrizzata per lunghezza d'arco** o, più brevemente, **P.L.A.**.*

Definizione 1.7 *Sia $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$; una **riparametrizzazione di** γ è una curva $\alpha : J \to \mathbb{R}^3$ tale che $\alpha = \gamma \circ \varphi$ con φ con $\varphi : J \to I$ diffeomorfismo crescente (per non invertire il senso di parametrizzazione), ovvero una funzione C^∞ con inversa C^∞.*

Notiamo che se $\varphi : J \to I$ è un diffeomorfismo crescente, dalla relazione $\varphi^{-1}(\varphi(t)) = t$ per ogni $t \in J$ si ottiene derivando $(\varphi^{-1})'(\varphi(t))\varphi'(t) = 1$ e quindi $\varphi'(t) \neq 0$ per ogni $t \in J \Rightarrow \varphi'(t) > 0$.

ESEMPIO: La curva $\gamma(t) = (R\cos\frac{t}{\sqrt{R^2+a^2}}, R\sin\frac{t}{\sqrt{R^2+a^2}}, a\frac{t}{\sqrt{R^2+a^2}})$ è l'elica circolare retta riparametrizzata per lunghezza d'arco.

Osserviamo che non possiamo riparametrizzare la cuspide per lunghezza d'arco, poiché otterremo una curva regolare e abbiamo mostrato con l'esercizio che questo è impossibile (possiamo accontentarci di riparametrizzare i due rami).

Ci interesserà studiare le curve a meno di riparametrizzazioni.

Proposizione 1.1.1 *Sia $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ una curva; sono fatti equivalenti:*

1. *γ è regolare;*

2. *γ ammette una riparametrizzazione per lunghezza d'arco.*

Dimostrazione:

$2 \Rightarrow 1$) Sia $\alpha = \gamma \circ \varphi$ con $\varphi : I \to J$ diffeomorfismo una riparametrizzazione P.L.A. di γ; allora $\forall t \in J$ $0 \neq \alpha'(t) = \gamma'(\varphi(t))\varphi'(t)$ e dunque deve valere che $\gamma'(\varphi(t)) \neq 0$ $\forall t \in J \Rightarrow \gamma'(s) \neq 0$ $\forall s \in I$ in quanto φ è in particolare una bigezione;

$1 \Rightarrow 2$) Sia $t_0 \in I$ e definiamo $\beta : I \to \mathbb{R}$ tale che $\beta(t) = \int_{t_0}^{t} \|\gamma'(t)\| dt = L(\gamma_{[t_0,t]})$. Per il teorema fondamentale del calcolo integrale si ha che $\beta'(t) = \|\gamma'(t)\| \Rightarrow \beta'(t) > 0$ grazie all'ipotesi. Posto adesso $J = \beta(I)$, esiste $\beta^{-1} : J \to I$ in quanto β è strettamente crescente e in particolare β^{-1} è C^∞ poiché β lo è. Poniamo allora $\varphi = \beta^{-1}$ e dunque:

$$\|(\gamma \circ \varphi)'(s)\| = \|\gamma'(\varphi(s))\varphi'(s)\| = \|\gamma'(\beta^{-1}(s))\|(\beta^{-1})'(s) = \|\gamma'(\beta^{-1}(s))\| \frac{1}{\beta'(\beta^{-1}(s))} = 1$$

Notiamo che la dimostrazione è puramente teorica e nella maggior parte dei casi non è possibile trovare esplicitamente il diffeomorfismo poiché si deve prima risolvere un integrale e poi trovare un'inversa. Vediamo adesso un caso in cui è possibile comunque ripercorrere la dimostrazione trovare una riparametrizzazione:
Esempio: Consideriamo la cicloide $\gamma(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t, 0)$ con $\|\gamma'(t)\| = 2\sin\frac{t}{2}$. Consideriamo l'intervallo aperto $(0, 2\pi)$ dove γ è regolare e calcoliamo

$$\beta(t) = L(\gamma_{[0,t]}) = \int_0^t 2\sin\frac{x}{2}dx = -4\cos\frac{t}{2} + 4$$

Possiamo adesso invertire $\beta(t)$ ottenendo $\beta^{-1}(s) = 2\arccos\frac{4-s}{4}$ e avendo quindi trovato una riparametrizzazione. Notiamo per curiosità che $L(\gamma_{[0,2\pi]}) = 8$ cioè un numero intero, cosa strana pensando alla curva che stavamo parametrizzando.

1.2 Orientazione e prodotto vettore

Per tutto il resto della sezione ci mettiamo in un spazio vettoriale reale di dimensione n

Definizione 1.8 *Sia V uno spazio vettoriale; due basi $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$ si dicono* ***equivalenti*** *($\mathcal{B}_1 \sim \mathcal{B}_2$) se la matrice del cambio di base $M_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_2}$ ha determinante positivo. Vale che $M_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_2} = (M_{\mathcal{B}_2}^{\mathcal{B}_1})^{-1}$ e dunque per il teorema di Binet se una ha determinante positivo, ce l'ha anche la seconda).*

Osservazione: La relazione appena introdotta è una relazione di equivalenza:

Riflessiva: La matrice del cambiamento di base è l'identità che ha determinante positivo;

Simmetrica: Vale che $M_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_2} = (M_{\mathcal{B}_2}^{\mathcal{B}_1})^{-1}$ e dunque per il teorema di Binet se una ha determinante positivo, ce l'ha anche la seconda;

Transitiva: Siano $M_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_2}$ e $M_{\mathcal{B}_2}^{\mathcal{B}_3}$ le matrici del cambiamento di base con determinante positivo tra $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$ e tra $\mathcal{B}_2$ e $\mathcal{B}_3$; allora $M_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_2} M_{\mathcal{B}_2}^{\mathcal{B}_3} = M_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_3}$ e sempre per il teorema di Binet si ha la tesi.

Definizione 1.9 *Una* ***orientazione*** *su V è (la scelta di) una classe di equivalenza di basi che vengono dette* ***positive*** *(le altre* ***negative****)*

Lemma 1.2.1 *Esistono esattamente due orientazioni su V con $n = dimV \geq 1$.*

Dimostrazione: Le basi $\mathcal{B}_1 = \{v_1, ..., v_n\}$ e $\mathcal{B}_2 = \{-v_1, v_2, ..., v_n\}$ hanno matrice del cambiamento di base identità con la posizione $(1,1)$ occupata da un -1 e quindi il determinante è negativo. In questo modo abbiamo mostrato che le classi di equivalenza sono almeno 2. Mostriamo che sono al massimo 2. Supponiamo $\mathcal{B}_1 \nsim \mathcal{B}_2$ e $\mathcal{B}_1 \nsim \mathcal{B}_3 \Rightarrow det(M_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_2}) < 0$ e $M_{\mathcal{B}_2}^{\mathcal{B}_3} < 0$. Allora $det(M_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_3}) = det(M_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_2} M_{\mathcal{B}_2}^{\mathcal{B}_3}) = det(M_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_2}) det(M_{\mathcal{B}_2}^{\mathcal{B}_3}) > 0$ e quindi $\mathcal{B}_1 \sim \mathcal{B}_3$ e le classi di equivalenza sono al massimo 2.

Lemma 1.2.2 *Sia $f : V \to W$ un isomorfismo tra spazi orientati; sono fatti equivalenti:*

1. *$\exists \mathcal{B}_1$ base positiva tale che $f(\mathcal{B}_1)$ è positiva in W;*
2. *$\forall \mathcal{B}_1$ base positiva si ha che $f(\mathcal{B}_1)$ è positiva in W;*
3. *$\exists \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ basi positive di V e W rispettivamente tali che $det(M_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_2}(f)) > 0$;*
4. *$\forall \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ basi positive di V e W rispettivamente si ha che $det(M_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_2}(f)) > 0$;*

Dimostrazione: Lasciata per esercizio.

Definizione 1.10 *Se f isomorfismo tra V e W verifica una qualsiasi delle condizioni precedenti si dice che f* ***preserva l'orientazione****.*

CONVENZIONE: D'ora in avanti $\mathbb{R}^n$ sarà dotato dell'orientazione indotta dalla base canonica.
OSSERVAZIONE: Sia V uno spazio vettoriale, $f : V \to V$ isomorfismo. f conserva l'orientazione $\Leftrightarrow \exists \mathcal{B}$ base di V tale che $det(M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}) > 0$.

Lemma 1.2.3 *Siano $v_1, ..., v_{n-1}$ vettori di $\mathbb{R}^n$, allora esiste un unico vettore w tale che $det(v_1|...|v_{n-1}|x) =< w, x >$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n$.*

Dimostrazione: La mappa $x \longmapsto det(v_1|...|v_{n-1}|x)$ è un funzionale lineare da $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}$ grazie alla multilinearità del determinante. Grazie al teorema di rappresentazione di Riesz sappiamo che se $<,>$ è un prodotto scalare non degenere $\exists! w \in \mathbb{R}^n$ tale che il funzionale è uguale a $< w, x >$ per ogni x.

Definizione 1.11 *Il vettore $w = v_1 \wedge ... \wedge v_{n-1}$ tale che $det(v_1|...|v_{n-1}|x) =< w, x >$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ si dice* ***prodotto vettore tra*** *$v_1, ..., v_{n-1}$.*

Proposizione 1.2.4 *Detto $w = v_1 \wedge ... \wedge v_{n-1}$ valgono le seguenti proprietà:*

1. *La funzione $F : (\mathbb{R}^n)^{n-1} \to \mathbb{R}^n$ tale che $v_1, ..., v_{n-1} \longmapsto w$ è multilineare alterna;*
2. *$w = 0 \Leftrightarrow$i $\{v_1, ..., v_{n-1}\}$ sono lineramente dipendenti;*
3. *Se $\{v_1, ..., v_{n-1}\}$ sono linearmente indipendenti, allora $\{v_1, ..., v_{n-1}, w\}$ è una base positiva di $\mathbb{R}^n$;*
4. *w è ortogonale a v_i per ogni $i = 1, .., n-1$;*
5. *Se $A \in O(n) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) | {}^t M M = I\}$, allora $Av_1 \wedge ... \wedge Av_{n-1} = (det(A))Aw$;*
6. *Se $v_1, ..., v_{n-1}$ sono un sistema ortonormale, allora $\{v_1, .., v_{n-1}, w\}$ è una base ortonormale.*

Dimostrazione:

1. Discende direttamente dalla multilinearità e dalla alternanza del determinante e dalla linearità del teorema di rappresentazione di Riesz. Ad esempio $det(v_1|v_2|...|v_{n-1}|x) = -det(v_2|v_1|...|v_{n-1}|x)$ per le proprietà del determinante e sono uno l'opposto dell'altro come funzionale per il teorema di rappresentazione di Riesz;

2. Se i v_i sono dipendenti, allora $det(v_1|...|v_{n-1}|x) = 0$ per le proprietà del determinante. Viceversa se sono indipendenti esiste un vettore $\bar{x}$ tale che $v_1, ..., v_{n-1}, \bar{x}$ è una base e dunque $det(v_1|...|v_{n-1}|\bar{x}) \neq 0$ e pertanto $w \neq 0$;

3. $det(v_1|...|v_{n-1}|w) =< w, w >= \|w\|^2$ che è maggiore di 0 se e solo se i v_i sono linearmente indipendenti (per (2)). La matrice $(v_1|...|v_{n-1}|w)$ è la matrice del cambiamento di base e pertanto ho dimostrato anche che è una base positiva;

4. $< w, v_i >= det(v_1|...|v_{n-1}|v_i) = 0$ per ogni i;

5. $< Aw, x >=< w, A^{-1}x >$ per l'ortogonalità di A^{-1}. Adesso $< Aw, x >=< w, A^{-1}x >= A^{-1}Av_1 \wedge ... \wedge A^{-1}Av_{n-1}, A^{-1}x >= det(A^{-1}Av_1|...|A^{-1}Av_{n-1}|A^{-1}x) = (det(A^{-1}))det(Av_1|...|Av_{n-1}|x) = (det(A)) < Av_1 \wedge ... \wedge Av_{n-1}, x >$ e dunque $Av_1 \wedge ... \wedge Av_{n-1} = (det(A))Aw$;

6. Osserviamo preliminarmente che dati gli elementi della base canonica $e_1, ..., e_{n-1}$ hanno come prodotto vettore $e_1 \wedge ... \wedge e_{n-1} = e_n$ in quanto $det(e_1|...|e_{n-1}|x) = x_n =< e_n, x >$. Dato che nell'algebra lineare funziona tutto bene $\exists A \in O(n)$ tale che $Av_i = e_i$ per ogni $i = 1, ..., n-1$. Vale quindi che $v_1 \wedge ... \wedge v_{n-1} = A^{-1}e_1 \wedge ... \wedge A^{-1}e_{n-1} = (det(A^{-1}))A^{-1}v_1 \wedge ... \wedge v_{n-1} = \pm A^{-1}e_n$. La matrice ortogonale porta dunque la base canonica in $v_1, ..., v_{n-1}, w$ e quindi la base è ortonormale positiva.

Proviamo a calcolare esplicitamente il prodotto vettore in $\mathbb{R}^3$. Sia $v = (v_1, v_2, v_3)$ e $w = (w_1, w_2, w_3)$, allora

$$det \begin{pmatrix} v_1 & w_1 & x_1 \\ v_2 & w_2 & x_2 \\ v_3 & w_3 & x_3 \end{pmatrix} = x_1(v_2w_3 - w_2v_3) - x_2(v_1w_3 - w_1v_3) + x_3(v_1w_2 - w_1v_2) =< x, v \wedge w >$$

con $v \wedge w = (v_2w_3 - w_2v_3, -v_1w_3 + w_1v_3, v_1w_2 - w_1v_2)$.

Lemma 1.2.5 *Nello spazio eucliedo $\mathbb{R}^3$ vale che $\|v \wedge w\| = \|v\|\|w\| \sin\theta$ con θ angolo tra v e w*

Dimostrazione: Facendo il conto direttamente esce; possiamo però semplificarlo: sia $A \in O(3)$ tale che $Av \in span(e_1)$ e $\{Av, Aw\}$. Usando adesso che A è ortogonale e preserva la norma posso supporre che $v = (a, 0, 0)$, $w = (b, c, 0)$ e a questo punto facendo il conto (più facile) si ha la tesi.

1.3 Versore tangente e curvatura

Definizione 1.12 *Sia $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ PLA; il* ***versore tangente di*** γ ***in*** s_0 *è $t(s_0) = \gamma'(s_0)$. Se γ è regolare ma non PLA, detta $\alpha = \gamma \circ \varphi$ una riparametrizzazione PLA si dice che il* ***versore tangente di*** γ ***in*** s_0 *è il versore tangente ad α nel punto $\varphi^{-1}(s_0)$ ovvero $t(s_0) = t_\alpha(\varphi^{-1}(s_0))$.*

Osservazione: Il versore tangente a una curva non PLA è ben definito: se cambiamo parametrizzazione PLA $\tilde{\alpha} = \gamma \circ \tilde{\varphi}$ abbiamo che $\alpha = \gamma \circ \varphi = \tilde{\alpha} \circ (\tilde{\varphi}^{-1} \circ \varphi)$ e $\psi = \tilde{\varphi}^{-1} \circ \varphi$ è ancora un diffeomorfismo. Prendendo la norma delle derivate vale che $\|\psi'(t)\| = 1$ poiché α e $\tilde{\alpha}$ sono PLA e dunque $\psi(t) = t + c$ e $\tilde{\alpha}(t) = \alpha(t + c)$ ovvero **due riparametrizzazioni PLA della stessa curva differiscono per una traslazione.** Un modo diverso e più comodo per calcolare il versore tangente è dato dalla formula $t(s_0) = \frac{\gamma'(s_0)}{\|\gamma'(s_0)\|}$

Definizione 1.13 *Sia $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ regolare PLA; la* ***curvatura di** γ **in** s_0 *è $k(s_0) = \|t'(s_0)\|$. Se γ è regolare ma non PLA, detta $\alpha = \gamma \circ \varphi$ una riparametrizzazione PLA allora $k(s_0) = k_\alpha(\varphi^{-1}(s_0))$*

Proposizione 1.3.1 *Sia $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ una curva regolare, allora $k = 0 \Leftrightarrow$ il supporto di γ è contenuto in una retta.*

Dimostrazione: **Poiché entrambi i membri sono invarianti per riparametrizzazione (curvatura per definizione e supporto non dipende dalla parametrizzazione) posso supporre γ P.L.A.**

$\Rightarrow$) $k = 0 \Rightarrow t'(s) = 0 \forall s$ cioè $t = \gamma'$ è costante e uguale a un certo v_0. Dunque se $s_0 \in I \Rightarrow \gamma(s) = \gamma(s_0) + \int_{s_0}^{s} \gamma'(t)dt = \gamma(s_0) + (s - s_0)v_0$ e questa è una retta parametrica;

$\Leftarrow$) Una retta è data dalla giacitura più un punto e dunque $\gamma(s) = p_0 + \alpha(s)v_0$ con $\|v_0\| = 1$ α è una funzione C^∞ poiché $\alpha(s) =<\gamma(s), v_0> - <p_0, v_0>$. Possiamo dunque derivare e otteniamo $\gamma'(s) = \alpha'(s)v_0$. γ è P.L.A. $\Rightarrow \|\gamma'(s)\| = 1$ e inoltre $\|v_0\| = 1$ per ipotesi, allora $\alpha'(s) = \pm 1$ e per continuità $\alpha = s$ o $\alpha = -s$ e dunque la tesi poiché γ' è costante e dunque $\|\gamma''(s)\| = k = 0$.

Lemma 1.3.2 *Sia $b : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ una forma bilineare. Allora b è C^∞ e se $\alpha : I \to \mathbb{R}^m$ e $\beta : I \to \mathbb{R}^n$ sono C^∞ allora*

$$\frac{d}{dt} b(\alpha(t), \beta(t)) = b(\alpha'(t), \beta(t)) + b(\alpha(t), \beta'(t))$$

Dimostrazione: Posso supporre $k = 1$ perché per essere bilineare deve esserlo componente per componente; allora $\exists b_{i,j}$ con $i = 1, ..., m$ e $j = 1, ..., n$ tali che $b(\alpha(t), \beta(t)) = \sum_{i,j} \alpha_i(t)\beta_i(t)b_{i,j}$ e dunque

$$\frac{d}{dt} b(\alpha(t), \beta(t)) = \sum_{i,j} (\alpha_i)'(t)\beta_i(t)b_{i,j} + \sum_{i,j} \alpha_i(t)(\beta_i)'(t)b_{i,j} = b(\alpha'(t), \beta(t)) + b(\alpha(t), \beta'(t))$$

Proposizione 1.3.3 *Sia $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ curva regolare non necessariamente P.L.A, allora $k(t) = \frac{\|\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)\|}{\|\gamma'(t)\|^3}$*

Dimostrazione: Sia $\beta = \gamma \circ \psi$ una riparametrizzazione PLA. Troviamo la curvatura di β. Vale che $\beta' = (\gamma' \circ \psi)\psi' \Rightarrow 1 = \|\beta'\| = \|\gamma' \circ \psi\||\psi'|$. Adesso $\psi' > 0$ per diffeomorfismo e dunque
$\psi' = \frac{1}{\|\gamma' \circ \psi} =<\gamma' \circ \psi, \gamma' \circ \psi>^{-\frac{1}{2}}$
$\psi'' = -\frac{1}{2} <\gamma' \circ \psi, \gamma' \circ \psi>^{-\frac{3}{2}} 2 <(\gamma'' \circ \psi)\psi', \gamma' \circ \psi> = -\frac{<\gamma'' \circ \psi, \gamma' \circ \psi>}{\|\gamma' \circ \psi\|^4}$
$\beta'' = (\gamma'' \circ \psi)(\psi')^2 + (\gamma' \circ \psi)\psi'' = \frac{1}{\|\gamma' \circ \psi\|^2}(\gamma'' \circ \psi - \gamma' \circ \psi \frac{<\gamma'' \circ \psi, \gamma' \circ \psi>}{\|\gamma' \circ \psi\|^2})$.
Osserviamo che il termine tra parentesi tonde non è altro che la proiezione di $\gamma'' \circ \psi$ lungo la direzione $\gamma' \circ \psi$ ortogonale (tolgo a $\gamma'' \circ \psi$ la componente su $\gamma' \circ \psi$). Se adesso chiamiamo α l'angolo tra $\gamma' \circ \psi$ e $\gamma'' \circ \psi$, allora la norma della proiezione scritta tra parentesi vale esattamente $\|\gamma'' \circ \psi\| \sin \alpha$ e otteniamo dunque:

$$\|\beta''\| = \frac{\|\gamma' \circ \psi\|\|\gamma'' \circ \psi\| \sin \alpha}{\|\gamma' \circ \psi\|^3} = \frac{\|(\gamma' \circ \psi) \wedge (\gamma'' \circ \psi\|}{\|\gamma' \circ \psi\|^3}$$

Applicando la definizione di curvatura $k(t) = k_\beta(\psi^{-1}(t)) = \|\beta''(\psi^{-1}(t))\|$ si ottiene la tesi.

Esempio: **Trattrice:** Sia $\gamma : (0, 2\pi) \to \mathbb{R}^3$ tale che $\gamma(t) = (\sin t, \cos t - \ln(\tan \frac{t}{2}), 0)$. La parte inferiore della curva rappresentata è la traiettoria che segue un peso attaccato con un'asta rigida a una persona che parte dall'origine e che si muove verticalmente verso il basso. La curva non è

regolare e quindi non è riparametrizzabile per lunghezza d'arco: basta osservare, ad esempio, che la lunghezza della curva è infinita, ma l'intervallo su cui è definita è limitato. Calcoliamo velocità e curvatura della curva:
$\gamma'(t) = (\cos t, \frac{1}{2}\frac{1}{\cos^2\frac{t}{2}}\frac{1}{\tan\frac{t}{2}} - \sin t, 0) = (\cos t, \frac{1}{\sin t} - \sin t, 0) = (\cos t, \frac{\cos^2 t}{\sin t}, 0)$
$\|\gamma'(t)\| = |\frac{\cos t}{\sin t}|$
$\gamma''(t) = (-\sin t, -\frac{\cos t}{\sin^2 t} - \cos t, 0) = (-\sin t, \frac{-\cos t(1+\sin^2 t)}{\sin^2 t}, 0)$
$\|\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)\| = \frac{\cos^2 t}{\sin^2 t}$
$k(t) = \frac{\|\gamma'(t)\wedge\gamma''(t)\|}{\|\gamma'(t)\|^3} = \frac{\cos^2 t}{\sin^2 t}|\frac{\sin^3 t}{\cos^3 t}| = |\tan t|$
Osserviamo che la velocità vale 0 quando $t = \frac{\pi}{2}$, che la curvatura tende a infinito quando t tende a $\frac{\pi}{2}$ e che la curvatura tende a 0 quanto t tende a 0 o a π. La curvatura descrive proprio quello che ci aspettiamo, ovvero quanto "curva" una curva.

Esercizio 1.3.1 *Calcolare la curvatura della cuspide:*

Soluzione: da svolgere

Definizione 1.14 *Sia $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ una curva; γ si dice **biregolare** se è regolare e $k(t) \neq 0$ per ogni $t \in I$. Se γ è biregolare e PLA, allora per definizione $t'(s) = \gamma''(s) = k(s)n(s)$ per un unico versore $n(s)$ che prende il nome di **versore normale** di γ in $\gamma(s)$. In sostanza $n(s)$ è la direzione dell'accellerazione e vale $n(s) = \frac{\gamma''(s)}{\|\gamma''(s)\|} = \frac{t'(s)}{k(s)}$. Se γ è biregolare, ma non PLA, e $\alpha = \gamma \circ \psi$, allora $n(t) = n_\alpha(\psi^{-1}(t))$.*

Lemma 1.3.4 *Sia $v : I \to \mathbb{R}^3$ C^∞ di norma costante, allora $v(t) \perp v'(t)$ per ogni $t \in I$.*

Dimostrazione: $\frac{d}{dt} < v(t), v(t) >= 0$ poiché sto derivando uno scalare e dunque $2 < v'(t), v(t) >= 0 \Rightarrow v'(t) \perp v(t)$

Corollario 1.3.5 *Se γ è biregolare, allora $n(t)$ è **davvero** normale, ovvero $n \perp t$ per ogni $s \in I$*

Dimostrazione: Posso supporre γ PLA perché sia n che t le calcolo parametrizzando per lunghezza d'argo. Adesso $n = \frac{t'}{k} \perp t$ poiché $t' \perp t$ in quanto $t(s)$ è costante in modulo per la parametrizzazione per lunghezza d'arco.

OSSERVAZIONI:

1. Se γ è regolare, t è C^∞: in quanto $t = \frac{\gamma'}{\|\gamma'\|}$ ed entrambe sono funzioni C^∞ (la norma lo è dovunque tranne che in 0, ma questo non ci interessa perché γ è regolare);

2. Se γ è biregolare e PLA, allora k, n sono C^∞: in quanto $k = \|\gamma''\|$ è diversa da 0 per la biregolarità ed $n = \frac{\gamma''}{k}$ lo è per lo stesso argomento della discussione precedente;

3. Se γ è solo regolare, non è detto che k sia C^∞

Definizione 1.15 *Sia gamma : $I \to \mathbb{R}^3$ biregolare. Il versore di $\gamma(t)$ definito come $b(s) = t(s) \wedge n(s)$ prende il nome di **versore binormale**. Per costruzione $(t(s), n(s), b(s))$ sono una base ortonormale positiva di $\mathbb{R}^3$ per ogni $s \in I$. Questa base prende il nome di **trideo di Frenet***

OSSERVAZIONE: Supponiamo γ PLA e biregolare, allora t, n, b sono funzioni C^∞. Possiamo dunque derivare $b(t)$ e otteniamo $b'(t) = t' \wedge n + t \wedge n' = kn \wedge n + t \wedge n' = t \wedge n' \Rightarrow b' \perp t$ per definizione di prodotto vettore. Poiché adesso $\|b\| = 1 \Rightarrow b' \perp b$ per il lemma precedente. Dunque $b' \in span(t, b)^\perp = span(n)$ e dunque $b'(s) = \tau(s)n(s)$ per quakche $\tau(s)$ numero reale.

Definizione 1.16 *La funzione $\tau : I \to \mathbb{R}^3$ prende il nome di* ***torsione*** *di γ. La funzione torsione è C^∞ in quanto, ad esempio, $\tau(s) =< b'(s), n(s) >$. Se γ è biregolare ma non PLA, allora $\tau_\gamma = \tau_\alpha(\psi^{-1}(s))$ dove $\alpha = \gamma \circ \psi$ è PLA.*

Nelle prossime definizioni, se non ulteriormente specificato, supponiamo *gamma* biregolare PLA

Definizione 1.17 *$\forall t_0 \in I$ il* ***piano osculatore di*** *γ* ***in*** *$\gamma(t_0)$ è l'unico piano P tale che $d(\gamma(t), P)$ è un $o((t-t_0)^2)$ per $t \to t_0$ (con d distanza euclidea).*

Proposizione 1.3.6 *Il piano osculatore è ben definito ed è il piano affine $\gamma(s_0)+span(t(s_0), n(s_0))$*

Dimostrazione: Consideriamo un piano generico P e calcoliamo la distanza tra $\gamma(s)$ e P: P ha equazione $P = \{x \in \mathbb{R}^3 | < x, v >= a\}$ per qualche $v \neq 0$, $v \in \mathbb{R}^3$, $\|v\| = 1$ e $a \in \mathbb{R}$ (posso sempre farlo portando la norma di v su a). Poiché per costruzione v è un vettore ortogonale a $P \Rightarrow d(\gamma(s), P) = | < \gamma(s), v > -a|$; per non sfruttare la distanza che non è una funzione C^∞ sfruttiamo il fatto che $| < \gamma(s), v > -a|$ è $o((s-s_0)^2) \Leftrightarrow$ lo è quello che è dentro il modulo. Chiamiamo dunque $f(s) =< \gamma(s), v > -a$ che è C^∞. Se P è il piano osculatore, allora $f(s_0) = f'(s_0) = f''(s_0) = 0$ con $f'(s) =< \gamma'(s), v >=< t(s), v >$ e $f''(s) =< \gamma''(s), v >=< k(s)n(s), v >= k(s) < n(s), v >$ con $k(s) \neq 0$ per la biregolarità. Imponendo le 3 condizioni:

$$\begin{cases} f(s_0) = 0 \\ f'(s_0) = 0 \\ f''(s_0) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} < \gamma(s_0), v >= a \\ v \perp t(s_0) \\ v \perp n(s_0) \end{cases} \iff \begin{cases} < \gamma(s_0) \in P \\ Giac(P) = span(t(s_0), n(s_0)) \end{cases}$$

Le ultime due condizioni determinano in modo univoco il nostro piano affine.

Proposizione 1.3.7 *Esiste unica circonferenza $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ PLA tale che $\alpha(s_0) = \gamma(s_0)$, $\alpha'(s_0) = \gamma'(s_0)$, $\alpha''(s_0) = \gamma''(s_0)$; tale circonferenza giace sul piano osculatore , ha centro su $\gamma(s_0) + span(n(s_0))$ e raggio $\frac{1}{k(s)}$*

Dimostrazione: Possiamoo scrivere una generica circonferenza PLA in questo modo: $\alpha(s) = c + R(\cos\frac{s}{R})v_1 + (\sin\frac{s}{R})v_2$ con c centro e $\{v_1, v_2\}$ sistema ortonormale. Si ha $\alpha'(s) = -(\sin\frac{s}{R})v_1 + (\cos\frac{s}{R})v_2$ e $\alpha''(s) = (-\frac{1}{R}\cos\frac{s}{R})v_1 - (\frac{1}{R}\sin\frac{s}{R})v_2$. A meno di riparametrizzare γ posso supporre $s_0 = 0$, allora

$$\begin{cases} \alpha(0) = \gamma(0) \\ \alpha'(0) = \gamma'(0) = t(0) \\ \alpha''(0) = \gamma''(0) = k(0)n(0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c + Rv_1 = \gamma(0) \\ v_2 = t(0) \\ -\frac{v_1}{R} = k(0)n(0) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v_1 = -n(0) \\ R = \frac{1}{k(0)} \\ c = \gamma(0) + \frac{n(0)}{k(0)} \end{cases}$$

allora $span(v_1, v_2) = span(n(0), t(0))$ e α è interamente contenuta in $c + span(v_1, v_2) = \gamma(0) + span(n(0), k(0))$ che è esattamente il piano osculatore.

Definizione 1.18 *La circonferenza che soddisfa le ipotesi della proposizione precedente è detta* ***cerchio osculatore*** *e il suo raggio $R = \frac{1}{k(s_0)}$ è detto* ***raggio di curvatura*** *che è inversamente proporzionale alla curvatura (se abbiamo una retta, cioè curvatura tendente a 0, il raggio tende a infinito)*

Osservazione: Il versore binormale $b(s) = t(s) \wedge n(s)$ è ortogonale al piano osculatore e la torsione τ ($b' = \tau n \Rightarrow \tau = \|b'\|$) misura la *variazione del piano osculatore*.

Teorema 1.3.8 *Data γ biregolare e PLA, gamma è piana (cioè ha supporto contenuto in un piano) se e solo se la sua torsione è identicamente nulla ($\tau = 0$ per ogni $s \in I$).*

Dimostrazione: $\Rightarrow$) Se $\gamma(I) \subseteq P$ con P piano $\Rightarrow d(\gamma(s), P) = 0$ per ogni $s \in I$ e dunque P è il piano osculatore per ogni $s \in I$. Ora $b(s) \perp Giac(P) \forall s$, cioè $\exists v_0 \in \mathbb{R}^3$ tale che $b(s) = \pm v_0$ $\forall s$ e $\|v_0\| = 1$ (t e n sono versori e γ è PLA), ovvero b è un versore ortogonale al piano e per continuità, $b = v_0$ o $b = -v_0$ costantemente $\Rightarrow b' = 0 \Rightarrow \tau = 0$
; $\Leftarrow$) Supponiamo $\tau = 0 \Rightarrow b' = \tau n = 0 \Rightarrow \exists v_0$ versore costante tale che $b(s) = v_0$ per ogni $s \in I$. Sia $f : I \to \mathbb{R}$ tale che $f(s) =< \gamma(s), v_0 >$, allora $f'(s) =< \gamma'(s), v_0 >=< t(s), b(s) >= 0 \Rightarrow f$ è costante, cioè esiste $a \in \mathbb{R}$ tale che $< \gamma(s), v_0 >= a$ per ogni $s \in I$, ovvero $\gamma(I) \subseteq \{x \in \mathbb{R}^3 | < x, v_0 >= a\}$ che è un piano.

Teorema 1.3.9 (Formule di Frenet) *Sia gamma biregolare PLA, allora valgono*

$$\begin{cases} t' = kn \\ n' = -kt - \tau b \\ b' = \tau n \end{cases} \qquad (t'|n'|b') = (t|n|b) \begin{pmatrix} 0 & -k & 0 \\ k & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix}$$

In particolare derivando la matrice $(t|n|b)$ salta fuori una matrice antisimmetrica.

Dimostrazione: $t' = kn$ e $b' = \tau n$ sono vere per definizione. Abbiamo $\{t, n, b\}$ base ortonormale positiva $\Rightarrow \{b, t, n\}$ lo è$\Rightarrow n = b \wedge t \to n' = b' \wedge t + b \wedge t' = \tau n \wedge t + b \wedge kn = -kt - \tau b$ che è la tesi.

Proposizione 1.3.10 (Interpretazione geometrica del segno di τ) *γ passa dal semispazio prodotto dal piano osculatore che contiene b a quello che contiene $-b$ se e solo se $\tau > 0$*

Dimostrazione: Chiamiamo P il piano osculatore; sviluppando in serie di Taylor la curva γ in un intorno di s_0 (lo posso fare perché γ è C^∞) ottengo

$$\gamma(s) = \underbrace{\gamma(s_0) + (s - s_0)\gamma'(s_0) + \frac{(s - s_0)^2}{2}\gamma''(s_0)}_{\in P} + \frac{(s - s_0)^3}{6}\gamma'''(s_0) + o((s - s_0)^3)$$

Come indicato le prime due derivate non mi danno informazioni; calcoliamo esplicitamente la derivata terza:

$$\gamma'''(s) = (kn)' = k'n + k(-kt - \tau b) = \underbrace{k'n - k^2 t}_{\in P} - \tau k b$$

Dunque posso scrivere semplicemente

$$\gamma(s) = \underbrace{\Psi(s)}_{\in P} + \frac{(s - s_0)^3}{6}(-\tau(s_0)k(s_0)b) + o((s - s_0)^3)$$

A questo punto ragionando sul segno di τ si ottiene la tesi.

Osservazione: la curva γ interseca il piano osculatore in modo tutt'altro che trasversale in quanto sia γ' che γ'' giacciono localmente sul piano osculatore; infatti nella dimostrazione siamo andati a rispetto a un'o-piccolo di $(s - s_0)^3$. Se vi proiettiamo la curva γ si avrà un flesso

Esempio: Calcoliamo k e τ di un'elica circolare retta PLA $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $\gamma(t) = (R\cos\frac{s}{\sqrt{R^2+a^2}}, R\sin\frac{s}{\sqrt{R^2+a^2}}$ con $R > 0$, $a \in \mathbb{R}$. Calcoliamo le varie derivate: poniamo $\theta = \frac{s}{\sqrt{R^2+a^2}}$:
$\gamma'(s) = t(s) = (-\frac{\theta R}{s}\cos\theta, \frac{\theta a}{s})$
$\gamma''(s) = (-\frac{R}{R^2+a^2}\cos\theta, -\frac{R}{R^2+a^2}\sin\theta, 0)$

$k(s) = \|\gamma''(s)\| = \frac{R}{R^2+a^2}$ costante
$n(s) = \frac{\gamma''(s)}{k(s)} = (-\cos\theta, .\sin\theta, 0)$
$b(s) = t(s) \wedge n(s) = (\frac{\theta a}{s}\sin\theta, -\frac{\theta a}{s}\cos\theta, \frac{\theta R}{s})$
$b'(s) = (\frac{a}{R^2+a^2}\cos\theta, \frac{a}{R^2+a^2}\sin\theta, 0) = -\frac{a}{R^2+a^2}n(s) \Rightarrow \tau(s) = -\frac{a}{R^2+a^2}$
Osserviamo che curvatura e torsioni sono costanti per quanto riguarda l'elica circolare: potevamo aspettarci questo risultato poiché dati due punti nell'elica è sempre possibile portarne uno nell'altro mediante una isometria affine che vedremo lasciare invariata curvatura e torsione.

Esercizio 1.3.2 *Sia $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ biregolare PLA; sia $A \in O(3)$, $v \in \mathbb{R}^3$ e consideriamo $\gamma_1 : I \to \mathbb{R}^3$, $\gamma_1(s) = A\gamma(s) + v$ e $\gamma_2(s) = \gamma(-s)$. Calcolare curvatura e torsione di γ*

Soluzione: Calcoliamo separatamente curvatura e torsione delle due curve:

γ_1) $\gamma_1'(s) = (A\gamma + v)'(s) = A\gamma'(s) = At_\gamma(s) \Rightarrow \|\gamma_1'(s)\| = \|At_\gamma(s)\| = 1$ poiché $A \in O(3)$ e inoltre $t_{\gamma_1} = At_\gamma$
$\gamma_1''(s) = t_{\gamma_1}'(s) = (At_\gamma)'(s) = Ak_\gamma(s)n_\gamma(s)$
$k_{\gamma_1}(s) = \|k_\gamma(s)An_\gamma(s)\| = 1$ per $A \in O(3)$
$n_{\gamma_1}(s) = \frac{\gamma_1''(s)}{k_{\gamma_1}(s)} = An_\gamma(s)$
$b_{\gamma_1}(s) = t_{\gamma_1}(s) \wedge n_{\gamma_1}(s) = At_\gamma(s) \wedge An_\gamma(s) = det(A)Ab_\gamma(s)$
$b_{\gamma_1}'(s) = det(A)(Ab_\gamma)'(s) = det(A)Ab_\gamma'(s) = det(A)\tau_\gamma(s)An_\gamma(s) = det(A)\tau_\gamma(s)n_{\gamma_1}(s)$ e dunque $\tau_{\gamma_1}(s) = det(A)\tau_\gamma(s)$ e $k_{\gamma_1}(s) = k_\gamma(s)$.
Osserviamo che abbiamo anche mostrato che una isometria manda il triedro di Frenet di γ nel triedro A·triedro di γ

γ_2) $\gamma_2'(s) = -\gamma'(-s) \Rightarrow \|\gamma_2'(s)\| = 1$ e dunque $t_{\gamma_2}(s) = -t_\gamma(-s)$
$\gamma_2''(s) = (-\gamma'(-s))' = \gamma''(-s) = t_\gamma'(-s) = k_\gamma(-s)n_\gamma(-s)$
$k_{\gamma_2}(s) = k_\gamma(-s)$ e $n_{\gamma_2}(s) = An_\gamma(-s)$
$b_{\gamma_2}(s) = t_{\gamma_2}(s) \wedge n_{\gamma_2}(s) = -t_\gamma(-s) \wedge -n_\gamma(-s) = -b_\gamma(-s)$
$b_{\gamma_2}'(s) = (b_\gamma)'(-s) = \tau_\gamma(-s)n_\gamma(-s) = \tau_\gamma(-s)n_{\gamma_2}(s)$ e dunque $\tau_{\gamma_2}(s) = \tau_\gamma(-s)$ e $k_{\gamma_2}(s) = k_\gamma(-s)$.

Esercizio 1.3.3 *Mostrare che curvatura e torsione non cambiano lungo riparametrizzazione*

*Soluzione:*da fare

Definizione 1.19 *Due curve $\gamma_1, \gamma_2 : I \to \mathbb{R}^3$ si dicono* ***congruenti*** *se $\exists f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ isometria affine positiva tale che $\gamma_2(s) = f(\gamma_1(s))$ per ogni $s \in I$, ovvero $\exists A \in SO(3)$ e $v \in \mathbb{R}^3$ tali che $\gamma_2(s) = A\gamma_1(s) + v$.*

La congruenza è una relazione di equivalenza

Teorema 1.3.11 (Teorema fondamentale delle curve) *Sia $k : I \to (0, +\infty)$ e $\tau : I \to \mathbb{R}$ funzioni C^∞ assegnate; allora esiste una curva biregolare PLA $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ con $k_\gamma = k$ e $\tau_\gamma = \tau$. Inoltre tale curva è unica a meno di congruenza.*

Dimostrazione: **Esistenza)** Vogliamo costruire un triedro di Frenet mobile e poi integrare la velocità per avere la nostra curva. Costruiamo dunque un triedro per γ; sia $s_0 \in I$, e_1, e_2, e_3 la base canonica e studiamo il sistema

$$\begin{cases} \bar{t}' = k\bar{n} \\ \bar{n}' = -k\bar{t} - \tau\bar{b} \\ \bar{b} = -\tau\bar{n} \\ \bar{t}(s_0) = e_1 \\ \bar{n}(s_0) = e_2 \\ \bar{b}(s_0) = e_3 \end{cases}$$

Osserviamo che le condizioni iniziali le potevamo scegliere in modo casuale, bastava solo scegliere un sistema ortonormale (e per semplicità uso la base canonica). Osserviamo anche che questo è un sistema lineare di 9 equazioni in 9 incognite con 9 condizioni iniziale e pertanto, per il teorema di Cauchy, questo sistema ammette un'unica soluzione che è definita su tutto I (per la linearità). Abbiamo dunque le funzioni $\bar{t}, \bar{n}, \bar{b} : I \to \mathbb{R}^3$ che sono una base ortonormale positiva per $s = s_0$; vogliamo che lo siamo $\forall s \in I$. Equivalentemente vogliamo mostrare che la matrice $M = (\bar{t}|\bar{n}|\bar{b}) \in SO(3)$ per ogni $s \in I$, cioè ci basta mostrare che la mastrice $X(s) =^t M(s)M(s)$ è costantemente l'identità e che $det(M) > 0$ per ogni $s \in I$. L'idea è quella di capire che equazione differenziale verifica X. Abbiamo osservato che le formule di Frenete possono essere anche scritte in forma matriciale come $M'(s) = M(s)A(s)$ con A matrice antisimmetrica, allora

$$X' = ({}^tMM)' =^t M'M +^t MM' =^t (MA)M +^t MMA = -A^tMM +^t MMA = -AX + XA$$

e dunque studiamo il sistema lineare

$$\begin{cases} X' = -AX + XA \\ X(s_0) =^t M(s_0)M(s_0) = I \end{cases}$$

Sempre per il teorema di Cauchy sappiamo che la soluzione è unica, ma osserviamo (rubiamo) che $X = I$ costantemente è soluzione. Grazie a questa osservazione abbiamo mostrato che il triedro mobile di Frenet $\bar{t}, \bar{n}, \bar{b}$ è sempre ortonormale. Per mostrare che il $detM(s) > 0$ osserviamo che la funzione $s \longmapsto det(M(s))$ è continua e può valere solo 1 e -1. Dato che per s_0 il determinante vale 1 la funzione è costantemente uguale a 1 per continuità. Poniamo adesso

$$\gamma(s) = \int_{s_0}^{s} \bar{t}(u)du$$

e verifichiamo che la curva abbia le proprietà richieste:
$\gamma'(s) = \bar{t}(s)$ e $\|\bar{t}(s)\| = 1 \Rightarrow \gamma$ è PLA e $t(s) = \bar{t}(s)$
$\gamma''(s) = \bar{t}'(s) = k(s)\bar{n}(s)$ per costruzione e vale che $k(s)$ è la curvatura e $\bar{n}(s) = n(s)$ perché è unitario.
$b(s) = t(s) \wedge n(s) = \bar{t}(s) \wedge \bar{n}(s) = \bar{b}(s)$ e dunque il triedro di Frenet è proprio quello imposto.
$b'(s) = \bar{b}'(s) = \tau(s)\bar{n}(s) = \tau(s)n(s)$, per cui $\tau(s)$ è la torsione di γ proprio come volevo.
Unicità: Siano γ_1, γ_2 due curve PLA biregolari con k curvatura e τ torsione. Sia (t_i, n_i, b_i) il triedro di Frenet di γ_i. Per i teoremi di algebra lineare, esiste una $A \in SO(3)$ tale che

$$\begin{cases} At_1(s_0) = t_2(s_0) \\ An_1(s_0) = n_2(s_0) \\ Ab_1(s_0) = b_2(s_0) \end{cases}$$

ed inoltre esiste un $v \in \mathbb{R}^3$ tale che $A\gamma_1(s_0) + v = \gamma_2(s_0)$ Adesso la terna (At_1, An_1, Ab_1) verifica le condizioni del sistema di Frenet della seconda curva e pertanto per l'unicità del sistema di

Cauchy otteniamo che per ogni $s \in I$ vale $At_1(s) = t_2$. Ma allora vale

$$\gamma_2(s) = \gamma_2(s_0) + \int_{s_0}^{s} t_2(u)du = \gamma_2(s_0) + \int_{s_0}^{s} At_1(u)du = A\gamma_1(s_0) + v + A\gamma_1(s) - A\gamma_1(s_0) = A\gamma_1(s) + v$$

che è la tesi.

Corollario 1.3.12 *Sia γ biregolare PLA con curvatura e torsione costanti, allora gamma è una elica circolare retta a meno di congruenza.*

Esercizio 1.3.4 *Sia γ regolare PLA tale che tutte le rette tangenti a γ si incontrano in un punto, allora il supporto di γ è contenuto in una retta.*

Soluzione: Per ipotesi esiste $p \in \mathbb{R}^3$ e $\alpha(s) \in \mathbb{R}$ tale che $\gamma(s) + \alpha(s)t(s) = p$ per ogni $s \in I$. Osserviamo che α è C^∞ in quanto (calcolando $< \alpha(s), t(s) >$ si ottiene che $\alpha(s) =< p, t(s) > - < \gamma(s), t(s) >$ che è differenza di prodotti scalari C^∞. Derivando dunque la retta generica si ha: $t(s) + \alpha(s)t'(s) + \alpha'(s)t(s) = 0 = t(s)(1 + \alpha'(s)) + t'(s)\alpha(s)$ e dato che t e t' sono linearmente indipendenti ottengo il segeuente sistema valido per ogni $s \in I$:

$$\begin{cases} 1 + \alpha'(s) = 0 \\ \alpha(s)t'(s) = 0 \end{cases}$$

Da questo sistema ricaviamo che $\alpha'(s) = -1 \Rightarrow \alpha(s) = \alpha_0 - s$ e dunque, mettendolo nella seconda, si ha $(\alpha_0 - s)t'(s) = 0$ e dunque $t'(s) = 0$ ovunque tranne al più in un punto, ma dato che t' è continua deve annullarsi anche in quel punto e dunque $t'(s) = 0$. A questo punto $t(s) = v_0$ per un certo $v_0 \in \mathbb{R}^3$ e dunque $\gamma(s) = p - (\alpha_0 - s)v_0$ che è la parametrizzazione di una retta.

Esercizio 1.3.5 *Sia γ biregolare PLA tale che tutte le rette normali si incontrano in un punto, allora il supporto di γ è contenuto in una circonferenza.*

Per ipotesi esiste $p \in \mathbb{R}^3$ tale che $\gamma(s) + \alpha(s)n(s) = p$. Come nell'esercizio precedente α è C^∞ e pertanto, derivando, si ottiene $\gamma'(s) + \alpha'(s)n(s) + \alpha(s)n'(s) = 0$ ovvero, usando le formule di Frenet, $t' + \alpha' n + \alpha(-kt - \tau b) = 0 \Leftrightarrow t(1 - \alpha k) + \alpha' n - \alpha\tau b = 0$ per ogni $s \in I$. Imponendo la lineare indipendenza si ha:

$$\begin{cases} 1 - \alpha k = 0 \\ \alpha' = 0 \\ \alpha\tau = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = \alpha_0 \neq 0 \ \text{ perché } \alpha k = -1 \\ k(s) = \frac{1}{\alpha_0} \\ \tau(s) = 0 \end{cases}$$

A questo punto ho dimostrato che k e τ sono costanti e so per il teorema fondamentale delle curve che una τ e una k così fatte, hanno per supporto una circonferenza e dunque la curva *gamma* avrà supporto in una circonferenza.

Esercizio 1.3.6 *Sia $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $\gamma(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t, \sqrt{2}e^t)$ **(spirale logaritmica)**. Trovare una parametrizzazione PLA della curva, calcolare inoltre curvatura e torsione.*

Soluzione: Calcoliamo prima di tutto il modulo della velocità per vedere se γ è regolare: $\gamma'(s) = (e^t(\cos t - \sin t), e^t(\cos t + \sin t), \sqrt{2}e^t)$ e dunque $\|\gamma'(t)\| = \sqrt{2e^{2t} + 2e^{2t}} = 2e^t > 0$ per ogni $t \in \mathbb{R}$. Dato che la curva è regolare cerco una riparametrizzazione per unghezza d'arco ripercorrendo la dimostrazione fatta:

$$L(\gamma_{|[0,t]}) = \int_0^t 2e^u du = 2e^t - 2$$

Detto s il mio parametro della parametrizzazione PLA voglio che $s = 2e^t - 2$: il -2 causa problemi a livelli di conto e mi darebbe un dominio $(-2, +\infty)$; per questo applico una traslazione (abbiamo mostrato che due riparametrizzazioni per lunghezza d'arco differiscono per un traslazione) e considero $s = 2e^t$ e dunque $t = \ln \frac{s}{2}$. Con un abuso di notazione abbiamo adesso la nostra curva $\gamma : (0\infty) \to \mathbb{R}^3$ riparametrizzata per lunghezza d'arco:

$$\gamma(s) = \Big(\frac{s}{2}\cos(\ln\frac{s}{2})), \frac{s}{2}\sin(\ln\frac{s}{2}), \frac{\sqrt{2}}{2}s\Big) = \frac{1}{2}\Big(s\cos(\ln\frac{s}{2})), s\sin(\ln\frac{s}{2}), \sqrt{2}s\Big)$$

Possiamo adesso calcolare curvatura e torsione

$$\gamma'(s) = \frac{1}{2}\Big(\cos(\ln\frac{s}{2} - \sin\ln\frac{1}{2}, \sin\ln\frac{s}{2} + \cos\ln\frac{s}{2}, \sqrt{2}\Big) = \frac{\sqrt{2}}{2}\Big(\cos\ln(\frac{s}{2} + \frac{\pi}{4}), \sin\ln(\frac{s}{2} + \frac{\pi}{4}), 1\Big)$$

Poniamo adesso $\ln(\frac{s}{2} + \frac{\pi}{2}) = \alpha(s)$ con $\alpha'(s) = \frac{1}{s}$. Allora

$$\gamma''(s) = \frac{\sqrt{2}}{2}\Big(-\frac{1}{s}\sin\alpha(s), \frac{1}{s}\cos\alpha(s), 0\Big)$$

e dunque $k(s) = \frac{\sqrt{2}}{2s}$ e $n(s) = (-\sin\alpha(s), \cos\alpha(s), 0)$; $k(s) > 0$ sempre per il dominio di definizione e quindi ho la biregolarità.
$b(s) = t(s) \wedge n(s) = \frac{\sqrt{2}}{2}(-\cos\alpha(s), -\sin\alpha(s), 1)$.
$b'(s)\frac{\sqrt{2}}{2}(\frac{1}{s}\sin\alpha(s), -\frac{1}{s}\cos\alpha(s), 0) = \frac{\sqrt{2}}{2s}n(s) \Rightarrow \tau(s) = -\frac{\sqrt{2}}{2s}$. Osserviamo in particolare che $\frac{\tau}{k} = -1$

Proposizione 1.3.13 *Sia $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ biregolare PLA, sono fatti equivalenti:*

1. *$\frac{\tau}{k}$ =costante;*
2. *$\exists v_0 \neq 0$ tale che $< t(s), v_0 >$=costante;*
3. *γ è congruente a una curva del tipo $\gamma(s) = (\alpha(s), \beta(s), as)$ dove a e $\sqrt{(\alpha')^2 + (\beta')^2}$ sono costanti.*

*Una tale elica è detta **elica circolare***

Dimostrazione:

$2 \Rightarrow 3$) Per ipotesi esiste $v_0 \in \mathbb{R}^3$ tale che $< t(s), v_0 >$=costante. Sia $P = v_0^\perp$ e sia $\pi : \mathbb{R}^3 \to P$ la proiezione ortogonale. Per definizione, $\forall s \in I$ si ha che $\gamma(s) = \pi(\gamma(s)) + v_0 g(s)$ con $g(s)$ funzione C^∞. Derivando l'espressione di *gamma* e osservando che π è lineare si ha che $\gamma'(s) = t(s) = \pi(\gamma'(s)) + g'(s)v_0 = \pi(t(s)) + g'(s)v_0$. Adesso $< v_0, t(s) >=< v_0, \pi(t(s)) > + < v_0, v_0 g'(s) >= \|v_0\|^2 g'(s)$ =costante per ipotesi$\Rightarrow g'(s)$ =costante e cioè $g(s) = as + a_0 \Rightarrow$ mi sto muovendo perpendicolarmente a P in maniera lineare as. Inoltre $1 = \|t(s)\|^2 = \|\pi(t(s))\|^2 + a^2\|v_0\|^2 \Rightarrow \pi(\gamma(s))\|^2$ è costante. Chiamado $\pi(\gamma(s)) = \psi(s)$ ho scoperto che $\|\psi(s)\|$ =costante e $\gamma(s) = \psi(s) + (as + a_0)v_0$. A meno di traslazione per $-a_0 v_0$ ottengo $\gamma(s) = \psi(s) + asv_0$. A meno di elementi di $SO(3)$ posso portare il piano P nel piano $z = 0$ e v_0 andrà automaticamente in $e_3\lambda$. Se $A \in SO(3)$ è un tale elemento, allora $A\gamma(s) = A\psi(s) + as(0, 0, \lambda)$. La tesi segue dal fatto che $s \to \psi(s)$ ha velocità costante, giace su $A(P) = \{z = 0\}$ e $\|A\psi'(s)\|$ =costante perché A non altera la norma;

$3 \Rightarrow 2$) Trovo v_0 che, per una curva "normale" è $(0, 0, 1)$ e prendo $A \in SO(3)$ che mi da la congruenza: allora Av_0 è il vettore cercato;

$2 \Rightarrow 1)$ $< v_0, t >= a$ costante; derivando si ha $< v_0, kn >= 0 \Rightarrow < v_0, n >= 0$ poiché k è diverso da 0 per la biregolarità. Derivando ancora si ha $< v_0, -kt > + < v_0, -\tau b >= 0 \Rightarrow -ak = \tau < v_0, b >$. Devo far vedere che $< v_0, b >$ è costante diverso da 0: Vale il teorema di pitagora e pertanto $\|v_0\|^2 =< v_0, t >^2 + < v_0, n >^2 + < v_0, b >^2 = a^2 + < v_0, b >^2 \Rightarrow < v_0, b >^2$ è costante e per continuità anche $< v_0, b >$ lo è. Supponiamo adesso che $< v_0, b >= 0 \Rightarrow ak = 0 \Rightarrow a = 0 \Rightarrow \|v_0\| = 0$ assurdo. Dunque $< v_0, b >$ è costante diverso da 0 e $\frac{\tau}{k} = -\frac{a}{<v_0,b>}$;

$1 \Rightarrow 2)$ Cerco eplicitamente il v_0: lo cerco della forma $v_0 = at(s) + c(s)n(s) + d(s)b(s)$ con a costante come richiesto dal problema. Dal punto precedente so so già che $< v_0, n >= 0$ e $< v_0, b >= d$ costante: cerco quindi $v_0 = at(s) + db(s)$. Derivando si ottiene $0 = akn + d\tau n \Rightarrow ak + d\tau = 0$ e dunque ponendo $d = 1$ e $a = -\frac{\tau}{k}$ ho $v_0 = \frac{-\tau}{k} t + b$ e si ha la tesi.

Capitolo 2

Varietà differenziabili

Riprendiamo la definizione di funzione C^∞ definita su un insieme qualsiasi:

Definizione 2.1 *Sia $X \subseteq \mathbb{R}^n$ sottoinsieme qualsiasi e sia $f : X \to \mathbb{R}^n$; f è detta* ***funzione** C^∞* *se $\forall p \in X$ esistono un aperto U_p di $\mathbb{R}^k$ che contiene p e una funzione $F : U_p \to \mathbb{R}^n$ che è C^∞ tale che $f_{|X \cap U_p} = F_{|X \cap U_p}$. Una funzione che verifica tale proprietà è detta anche* ***funzione liscia***

OSSERVAZIONE: f è $C^\infty \Rightarrow f$ è localmente continua $\Rightarrow f$ è continua: infatti $U \cap X$ è aperto nella restrizione e dunque f è localmente continua su X e se una funzione è localmente continua, allora è continua. OSSERVAZIONE: Siano $f : X \to Y$, e $g : Y \to Z$ funzioni C^∞, allora $g \circ f : X \to Z$ è C^∞ e id_X è C^∞: basta vedere con le estensioni;

Definizione 2.2 *Siano $\Omega_1 \subseteq \mathbb{R}^m$, $\Omega_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ aperti e $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ funzione C^∞; per ogni punto $p \in \Omega_1$ esiste unica mappa lineare $df_p : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ tale che $f(p+v) = f(p) + df_p(v) + o(\|v\|)$ per ogni $v \in \Omega_1$. La funzione df_p prende il nome di* ***differenziale di f in** p*

Proprietà del differenziale:

1. $df_p(v) = \lim_{t\to 0} \frac{f(p+tv)-f(p)}{t}$;
2. Se $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}^n$, allora $d\gamma_0(1) = \gamma'(0)$ (è una funzione vettoriale, e tutto funziona bene);
3. Siano $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ e $g : \Omega_2 \to \Omega_3$ funzioni C^∞, allora $\forall p \in \Omega_1$ si ha $d(g \circ f)_p = dg_{f(p)} \circ df_p$;
4. Sia $f : \Omega_1 \to \Omega_2$, $v \in \mathbb{R}^m$ e $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}^m$ tale che $\gamma'(0) = v$ e $\gamma(0) = p$, allora $df_p(v) = (f \circ \gamma)'(0)$: infatti $(f \circ \gamma)'(0) = d(f \circ \gamma)_0(1) = df_{\gamma(0)} \circ d\gamma_0(1) = df_p(\gamma'(0)) = df_p(v)$;
5. $df_p = J(f)_p = (J(f)_p)_{i,j}$ con $(J(f)_p)_{i,j} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}$

OSSERVAZIONE: La proprietà 4 vale anche se γ è definita solo su $[0, \varepsilon)$ poiché vale su ogni intornino $(-\varepsilon, \varepsilon)$ e dunque funziona bene anche sulla restrizione. In particolare le derivate saranno solo destre, ma tutto funziona bene.

Teorema 2.0.1 (Teorema di invertibilità locale) *Sia $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ funzione C^∞ tra aperti di $\mathbb{R}^n$; se $p \in \Omega_1$ e $df_p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è invertibile, allora $\exists U_1 \subseteq \Omega_1$ e $U_2 \subseteq \Omega_2$ aperti, tali che $p \in U_1$ e $f_{|U_1} : U_1 \to U_2$ è un diffeomorfismo.*

Definizione 2.3 *Sia $X \subseteq \mathbb{R}^m$ insieme qualsiasi, $p \in X$. Il* ***cono tangente a** X **in** p è l'insieme $C_p(X) = \{v \in \mathbb{R}^m | v = \gamma'(0)$ per qualche curva C^∞ $\gamma : [0, \varepsilon] \to X, \gamma(0) = p\}$. Lo* ***spazio tangente*** *è il sottospazio vettoriale $T_p(X) = span(C_p(X))$*

Esempi:

1. Se $\Omega \in \mathbb{R}^n$ aperto $\Rightarrow C_p(X) = T_p(X) = \mathbb{R}^n$ poiché per ogni $v \in \mathbb{R}^n$ la curva $\gamma(t) = p + tv$ è in Ω per $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ per qualche $\varepsilon \Rightarrow \gamma'(0) = v \Rightarrow C_p(X) = \mathbb{R}^n$;

2. Sia $H^n = \{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n, x_n \geq 0\}$; se $p \in H^n \partial H^n \Rightarrow C_p(H^n) = T_p(H^n) = \mathbb{R}^n$ come sopra; se invece $p \in \partial H^n \Rightarrow C_p(H_n) = H^n$ (vanno bene tutti i vettori che entrano in H^n e dunque $T_p(H^n) = \mathbb{R}^n$;

3. Se $P = p + V$ è un sottospazio affine di giacitura V, allora $C_p(P) = T_p(P) = V$: infatti $\forall v \in V$ la curva $\gamma : [0, \varepsilon) \to P$, $\gamma(t) = p + tv$ è contenuta in P e $\gamma'(0) = v$ e dunque $v \in C_p(P)$; viceversa, $\forall \gamma : [0, \varepsilon) \to P$ ho $\gamma'(0) = \lim_{t \to 0} \frac{\gamma(t) - \gamma(0)}{t} \Rightarrow \gamma'(0) \in V$ poiché V è un chiuso e quindi il limite rimane dentro al chiuso V. Dato che valgono le due inclusioni $V = C_p(P) = T_p(P)$.

Proposizione 2.0.2 *Sia $f : X \to Y$ funzione C^∞ con $X \subseteq \mathbb{R}^m$, $Y \subseteq \mathbb{R}^n$, sia $v \in C_p(X), p \in X$. Scegliamo arbitrariamente $\gamma : [0, \varepsilon) \to X$ con $\gamma'(0) = v$ (esiste per definizione di $C_p(X)$) e sia $F : U \to \mathbb{R}^m$ una estensione locale di f intorno a p. Allora $dF_p = (f \circ \gamma)'(0)$ e la scelta non dipende né da γ, né da F.*

Dimostrazione: Per calcolare $dF_p(v)$ posso calcolare $dF_p(v) = (F \circ \gamma)'(0)$ e dato che γ è a valori in X vale che $dF_p = (f \circ \gamma)'(0) \Rightarrow dF_p(v)$ non dipende dalla scelta di F (poiché è eguagliato a un membro che non dipende da F) e non dipende nemmeno da γ perché è uguagliato a un qualcosa che non dipende da γ.

Definizione 2.4 *Nelle notazioni precedenti, notiamo che $(f \circ \gamma)'(0) \in C_{f(p)}(Y)$ per costruzione e dunque possiamo definire il* ***differenziale di una funzione*** *C^∞ come $df_p : C_p(X) \to C_{f(p)}(Y)$ come $df_p(v) = dF_p(v) = (f \circ \gamma)'(0)$. Poiché per costruzione $df_p = dF_{p|C_p(X)} \Rightarrow df_p$ si estende a una applicazione lineare tra gli spazi tangenti in modo unico che viene denotata comunque con il simbolo $df_p : T_p(X) \to T_{f(p)}(X)$.*

Proprietà del differenziale per funzioni qualsiasi:

1. Siano $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$, allora $d(g \circ f)_p = dg_{f(p)} \circ df_p$ (è sufficiente scrivere la definizione con le curve);

2. $d(Id_X) = Id_{T_p(X)}$;

3. Se $f : X \to Y$ è un diffeomorfismo (locale), allora $df_p : T_p(X) \to T_{f(p)}(Y)$ è un isomorfismo lineare

Le tre proprietà mettono in luce come il differenziale sia un funtore tra (Insiemi, mappe C^∞) e (Spazi vettoriali, Applicazioni lineari).

Definizione 2.5 *$X \subseteq \mathbb{R}^n$ è una* ***varietà k-dimensionale*** *se è localmente diffeomorfa ad aperti di R^k, ovvero se $\forall p \in X, \exists U$ che contiene p aperto in X e $\Omega \subseteq \mathbb{R}^k$ aperto e $\varphi : U \to \Omega$ diffeomorfismo. Una tale φ si dice* ***carta****, la sua inversa φ^{-1} si dice* ***parametrizzazione locale****. Un insieme di carte i cui domini ricoprono X si chiama* ***atlante****.*

Lemma 2.0.3 *Sia X una varietà k-dimensionale, allora $\forall p \in X$, $C_p(X) = T_p(X)$, $dim T_p(X) = k$ e per ogni carta $\varphi : U \to \Omega$, $\forall p \in U$ vale $T_p(X) = d\varphi^{-1}_{\varphi(p)}(\mathbb{R}^k)$*

Dimostrazione: Sia $\varphi^{-1} : \Omega \to U$ diffeomorfismo, allora $\forall q \in \Omega$, $d\varphi_q^{-1}$ da una bigezione tra i coni tangenti e un isomorfismo tra gli spazi tangenti (proprietà 3). Dunque $T_{\varphi^{-1}(q)}(X) = d\varphi_q^{-1}(T_q(\Omega)) = d_{\varphi^{-1}(q)}(C_q(\Omega)) = C_{\varphi^{-1}(q)}(X) = d\varphi_q^{-1}(\mathbb{R}^k)$ e dunque abbiamo un isomorfismo tra $\mathbb{R}^k$ e $T_{\varphi^{-1}(q)}(X)$ che è dunque uno spazio dimensionale di dimensione k e questo conclude poiché essendo φ^{-1} un diffeomorfismo, per ogni $p \in U$ esiste un q. Nella dimostrazione si è usato il fatto che $C_p(U) = C_p(X)$ e dunque $T_p(U) = T_p(X)$ che è ovvio in quanto U è aperto. A questo punto $C_p(X) = T_p(X)$ e la dimensione è k. Da rivedere

OSSERVAZIONE: Varietà diffeomorfe hanno la stessa dimensione in quanto un diffeomorfismo da un isomorfismo sugli spazi tangenti e dunque preserva la loro dimensione.

OSSERVAZIONE: Se X e Y sono varietà $X \subseteq \mathbb{R}^n$ e $Y \subseteq \mathbb{R}^m \Rightarrow X \times Y \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$ è varietà di dimensione $dimX + dimY$

ESEMPIO: **(1)**Ogni aperto di $\mathbb{R}^n$ è una n-varietà;
(2) Ogni aperto di una n-varietà è una n-varietà.

Esercizio 2.0.1 *Mostrare che* $S^n = \{(x_1, ..., x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} | \|x\| = 1\}$ *è una* n*-varietà*

Svolgimento: Dobbiamo esibire un'atlante per S^n (basterebbero due proiezioni stereografiche), ma prendiamo delle carte più semplici che sono le proiezioni: per ogni $i = 1, ..., n+1$ pongo $U_i^+ = \{x_i > 0\}$ e $U_i^- = \{x_i < 0\}$ che sono aperti in S^n per la topologia di sottospazio. Detto $B = B(0,1) \subseteq \mathbb{R}^n$ definisco le mappe $\varphi_i^\pm : U_i \to B$ tali che $\varphi_i^\pm(x_1, ..., x_{n+1}) = (x_1, ..., \cap x_i, ..., x_{n+1})$. Le funzioni $\varphi_i^\pm$ è C^∞ perché restrizione della proiezione da $\mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$ e inoltre è iniettiva e suriettiva su B banalmente. La sua inversa è $\psi_i^\pm : B \to U_i$ tale che $\psi_i(x_1, ..., x_n) = (x_1, ..., x_{i-1}, \pm\sqrt{1 - \sum_{j \neq i} \|x_j\|, x_{i+1}, ..., x_n}$ e questa è una funzione C^∞ perché la radice è costantemente positiva o costantemente negatica. Poiché gli U_i ricoprono S^n ho dimostrato che S^n è una varietà n-dimensionale.

Teorema 2.0.4 (Teorema di invertibilità locale per mappe tra varietà) *Sia* $f : X \to Y$ *tra varietà,* $p \in X$*. Se* $df_p : T_p(X) \to T_{f(p)}(Y)$ *è un isomorfismo, allora* $\exists U_1 \subseteq X$ *e* $U_2 \subseteq Y$ *aperti con* $p \in U_1$ *tali che* $f_| : U_1 \to U_2$ *è un diffeomorfismo.*

Dimostrazione: L'idea è quella che una varietà è localmente $\mathbb{R}^k$ e dunque se riporto le funzioni da aperti di $\mathbb{R}^k$ in aperti di $\mathbb{R}^n$ tramite le carte ottengo la tesi per il teorema di invertibilità locale. Dalle ipotesi e dal lemma ricaviamo che $dimX = dimY = k \Rightarrow \exists \varphi : V_p \to \Omega_1$ e $\psi : V_f(p) \to \Omega_2$ con Ω_1, Ω_2 aperti di $\mathbb{R}^k$ (con $p \in V_p$, $f(p) \in V_{f(p)}$. A meno di restringere V_p posso supporre che $f(V_p) \subseteq V_{f(p)}$ (lo posso fare perché f è continua) e posso considerare la mappa $g : \Omega_1 \to \Omega_2$ con $g = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}$. Adesso $dg_{\varphi(p)} = d\psi_{f(p)} \circ df_p \circ d\varphi_{\varphi(p)}^{-1}$ che è composizione di isomorfismi (quello centrale lo è per ipotesi) e dunque è isomorfismo. Per il teorema di invertibilità locale so che esistono $\Omega_1' \subseteq \Omega_1$ e $\Omega_2 \subseteq \Omega_2$ aperti tali che $g : \Omega_1' \to \Omega_2'$ è diffeomorfismo; posto dunque $U_1 = \varphi^{-1}(\Omega_1')$ e $U_2 = \psi^{-1}(\Omega_2')$, questi sono aperti e $f_{|U_1} = \psi^{-1} \circ g_{|\Omega_1'} \circ \varphi_{|U_1}$ è diffeomorfismo poiché composizione di diffeomorfismi con immagine U_2.

Definizione 2.6 *Sia* $f : X \to Y$ *tra varietà;* f *si dice* ***immersione*** *se* $df_p : T_p(X) \to T_{f(p)}(Y)$ *è iniettivo per ogni* $p \in X$*.*

OSSERVAZIONE: Non stiamo richiedendo l'iniettività di f, ma solo del suo differenziale.

Definizione 2.7 *Sia* $f : X \to Y$ *tra varietà;* f *si un* ***embedding*** *se è un diffeomorfismo con l'immagine, cioè* $f : X \to f(X)$ *è diffeomorfismo.*

ESEMPI:
(1) Una curva regolare è una immersione: sia $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, allora $d\gamma_p$ o è iniettiva o è l'applicazione nulla, ma γ è regolare e dunque $d\gamma_p = \gamma' \neq 0$.
(2) L'inclusione $i : S^2 \to \mathbb{R}^3$ è un embedding poiché è l'identità sull'immagine.

Proposizione 2.0.5 *Sia $f : X \to Y$ embedding, allora f è una immersione iniettiva.*

Dimostrazione: Se f è omeomorfismo sull'immagine allora deve essere necessariamente iniettiva. Inoltre se $g : f(X) \to X$ è l'inversa C^∞ di f, allora $\forall p \in X$ $dg_{f(p)} \circ df_p = d(g \circ f)_p = Id_{T_p(X)}$ e dunque df_p è iniettivo.

OSSERVAZIONE: Non vale il viceversa della proposizione precedente (cioè esiste un immersione iniettiva che non è un embedding: Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ tale che $f(t) = (\frac{t}{1+t^4}, \frac{t^2}{1+t^4})$; allora la sua derivata (che è il suo differenziale) vale $f'(t) = \frac{1}{(1+t^4)}(1 - 3t^4, 2t(1 - t^4))$ che è iniettiva poiché se si annulla la seconda componente, la prima necessariamente è diversa da 0 e dunque la matrice che si ottiene (che è la trasposta del vettore scritto) ha nel Ker solamente lo 0. Dunque la funzione f è una immersione; mostriamo anche che è iniettiva: supponiamo $f(t_1) = f(t_2)$ con $t_1, t_2 \neq 0$ (se uno dei due è 0 necessariamente lo deve essere anche l'altro), allora $t_1 = \frac{y(f(t_1))}{x(f(t_1))} = \frac{y(f(t_2))}{x(f(t_2))} = t_2$ dove $x(s) = f_1(s)$, $y(s) = f_2(s)$. Dunque f è una immersione iniettiva; mostriamo però che non è un diffeomorfismo con l'immagine: l'inversa di f è la funzione $g(x, y) = \frac{y}{x}$ con $g(0, 0) = 0$. Adesso g non è continua nel punto $(0, 0)$ ad esempio se faccio il $lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x, y)$ questo dipende dal cammino e non ottengo sempre $(0, 0)$) e dunque g non è un diffeomorfismo

Teorema 2.0.6 (Forma normale delle immersioni) *Sia $f : X \to Y$ immersione tra varietà, allora f è localmente l'inclusione di un sottospazio vettoriale a meno di una opportuna scelta di coordinate in arrivo, cioè $\forall p \in X$ e $\varphi : U_p \to \Omega_1 \subseteq \mathbb{R}^m$ carta con U_p intorno aperto di p, $\exists \psi : V_{f(p)} \to \Omega_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ tale che, a meno di restringere U_p, la funzione $\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \Omega_1 \to \Omega_2$ è definita e $\psi \circ f \circ \psi^{-1} = (x, 0_{\mathbb{R}^{n-m}})$ per ogni $x \in \Omega_1$.*

Dimostrazione: Sia $\psi : V_{f(p)} \to \Omega_2$ una carta qualsiasi intorno a $V_{f(p)}$ e restringiamo U_p in modo che $g = \psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \Omega_1 \to \Omega_2$ sia ben definita. In questo modo g è una mappa tra un aperto di $\mathbb{R}^m$ e un aperto di $\mathbb{R}^n$ e vale $dg_{\varphi(p)} = d\psi_{f(p)} \circ df_p \circ d\varphi^{-1}_{\varphi(p)}$ iniettivo poiché gli estremi sono diffeomorfismi, e il centrale lo è per ipotesi. In particolare deve valere $n \geq m$. Osserviamo adesso che se trovo un diffeomorfismo $K : \Omega_1 \to \Omega_2'$ aperti di $\mathbb{R}^n$ tale che $K \circ g(x) = (x, 0)$ ho la tesi perché scelgo la carta $K \circ \psi$ per l'enunciato. Quello che devo fare è solamente trovare questa K. In altre parole mi posso dimenticare di tutta la situazione sopra e posso identificare $\varphi(p)$ con p e la mia $f(p)$ tra varietà la leggo soltanto nella g che ho definito tra aperti. Abbiamo già mostrato come (nella nuova notazione) dg_p è iniettiva e pertanto mi sono già portato dietro l'ipotesi.
Abbiamo dunque $g : \Omega_1 \to \Omega_2$; quello che vogliamo fare è aggiungere a Ω_1 le dimensioni mancanti: considero quindi $H \in dg_p(\mathbb{R}^m)$ in $\mathbb{R}^n$ con base $\{v_1, ..., v_{n-m}\}$ e definisco la funzione $G : \Omega_1 \times \mathbb{R}^{n-m} \to \mathbb{R}^n$ tale che $G(x, (t_1, ..., t_{n-m})) = g(x) + \sum_{i=1}^{n-m} t_i v_i$. Adesso G è una funzione C^∞ e mi basta mostrare che $dG_{(p,0)}$ è bigettivo per poter usare il teorema di invertibilità locale. Dato che $dG_{(p,0)}$ è una applicazione lineare di spazi della stessa dimensione, mi basta dire che è suriettivo per dire che è bigettivo. Possiamo scrivere $g = G \circ i$ con $i : \Omega_1 \to \Omega_1 \times \mathbb{R}^{n-m}$ e dunque $dg_p = dG_{(p,0)} \circ di_p$ e dunque l'immagine di $dG_{(p,0)}$ contiene quella di dg_p. Definiamo inoltre la mappa $j : \mathbb{R}^{n-m} \to \Omega_1 \times \mathbb{R}^{n-m}$ tale che $j(t_1, ..., t_{n-m}) = (p, t_1, ..., t_{n-m})$; allora $G \circ j(t_1, ..., t_{n-m}) = g(p) + \sum_{i=1}^{n-m} t_i v_i$ è una funzione affine il cui differenziale coincide con la sua parte lineare che è un isomorfismo tra $\mathbb{R}^{n-m}$ e H in quanto i v_i sono una base, ma allora l'immagine di $dG_{p,0}$ contiene l'immagine di $d(G \circ j)_0 = dG_{p,0} \circ dj_0$ che è esattamente H. Dunque il differenziale $dG_{(p,0)}$ è suriettiva e quindi biettiva; posso allora applicare il teorema dell'invertibilità locale per cui esistono $\Omega_1' \subseteq \Omega_1$ e $B \subseteq \mathbb{R}^{n-m}$ aperti e $\Omega_2' \subseteq \Omega_2$ tale che $G_| : \Omega_1' \times B \to \Omega_2'$ è un diffeomorfismo.

Posto adesso $K = G^{-1}$ si ha la tesi: infatti $G(K(g(x)) = id(g(x) = g(x) = G(x, 0)$ e per la bigettività di G si ha $K(g(x)) = (x, 0)$ come voluto

OSSERVAZIONE: La tesi è vera punto per punto: df_p iniettivo per un certo p mi implica che intorno a lui posso trovare l'inversa C^∞.

Corollario 2.0.7 *Sia $f : X \to Y$ immersione, allora $\forall p \in X$ esiste U_p intorno di p aperto in X tale che $f_| : U_p \to f(U_p)$ è diffeomorfismo.*

Dimostrazione: A meno di una opportuna scelta di coordinate, $f(x) = (x, 0)$ in un intorno di p, da cui si ha la tesi.

ATTENZIONE: $f(U_p)$ potrebbe non essere aperto in $f(X)$ e dunque il corollario sopra non deve trarci in inganno nel farci pensare che immersione iniettiva =embedding

Lemma 2.0.8 *Sia $f : X \to Y$ immersione iniettiva, sono fatti equivalenti:*

1. *f è aperta sull'immagine;*
2. *f è omeomorfismo sull'immagine*
3. *f è un embedding (diffeomorfismo sull'immagine)*

Dimostrazione: $(3 \Rightarrow 2 \Rightarrow 1)$ e $(1 \Rightarrow 2)$ ovvie;
$(2 \Rightarrow 3)$ Devo far vedere che l'inversa è C^∞. $\forall p \in X, \exists U_p$ aperto in X tale che $f : U_p \to f(U_p)$è diffeomorfismo, ma $f(U_p)$ è aperto in $f(X)$ perché f è un omeomorfismo quindi da $g : f(U_p) \to U_p$ inversa di f deduco che $\forall q \in f(X)$ esiste un APERTO di $f(X)$ che contiene q su cui g è C^∞; dunque g è C^∞ e si ha la tesi.

Lemma 2.0.9 *Sia $f : X \to Y$ una immersione iniettiva tra varietà della stessa dimensione, allora f è un embedding.*

Dimostrazione: f è una applicazione aperta per il teorema di invertibilità locale e dunque si ha la tesi per il lemma precedente.

Discorso: Ho X e voglio costruire un atlante per X. Se non so ancora che X è varietà, devo mostrare che carte e parametrizzazioni dono diffeomorfismi oppure $d\varphi$ iniettivo + roba topologica). Se invece so già che è una varietà mi bastano immersione iniettive da aperti della stessa dimensione

Teorema 2.0.10 (Forma normale delle sommersioni) *Sia $f : X \to Y$ mappa tra varietà, sia $p \in X$ tale che $df_p : T_p(X) \to T_{f(p)}(Y)$ sia suriettivo. Per ogni carta $\psi : V_{f(p)} \to \Omega_2$ intorno a $f(p)$, a meno di restringere $V_{f(p)}$ esiste $\varphi : U_p \to \Omega_1$ intorno a p tale che $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}(X) = \pi(X)$, dove se $m = dimX$ e $n = dimY$ la mappa $\pi : \Omega_1 \to \Omega_2$ è la proiezione sulle prime n coordinate (ovvero f è localmente una proiezione.*

Dimostrazione: Per ipotesi, df_p è suriettivo e dunque $m \geq n$. Come per il teorema delle immersioni, posso supporre direttamente che $X = \Omega_1$ e $Y = \Omega_2$ e $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ con $p \in \Omega_1$ tale che $df_p : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ è suriettivo. Quello che voglio fare è trovare un diffeomorfismo locale e dunque devo trovare lo spazio da attaccare a Ω_2 per avere le stesse dimensioni. Chiamo $K = Kerdf_p$; vale che $dimK = m-n$ per la suriettività. Definiamo la funzione $\pi : \mathbb{R}^m \to K$ la proiezione ortogonale e sia $F : \Omega_1 \to \Omega_2 \times K$ data da $F(x) = (f(x), \pi(x))$; la funzione è C^∞ ovviamente. K è uno spazio vettoriale e dunque $\Omega_2 \times K$ è diffeomorfo a $\Omega_2 \times \mathbb{R}^{m-n}$, cioè a un aperto di $\mathbb{R}^m$ e dunque F è una mappa tra varietà della stessa dimensione. Mostriamo che df_p è iniettivo e dunque, per dimensione, si ha che df_p è biettivo per dimensione. Osserviamo prima di tutto che π è lineare e pertanto $d\pi = \pi$ e dunque $v \in KerdF_p \Leftrightarrow dF_p(v) = (df_p(v), \pi(v)) = (0,0) \Leftrightarrow df_p(v) = 0$ e $\pi(v) = 0 \Leftrightarrow v \in K$ e $v \notin K \Leftrightarrow v = 0$. Dato che dF_p è iniettivo è anche biettivo e dunque per il teorema di invertibilità locale esistono a meno di restringere Ω_1 e Ω_2 e di scegliere un intorno B di $\pi(p) \in K$, f si restringe a un diffeomorfismo $F : \Omega_1 \to \Omega_1 \times B$. L'inversa $F^{-1} = G$ è il cambio di coordinate che cerco: detto infatti $\Omega_1' = \Omega_2 \times B$, la composizione $f \circ G : \Omega_2 \times B \to \Omega_2$ è la proiezione; infatti per costruzione, $\forall (x, v) \in \Omega_2 \times B$ vale $(x, v) = F(G(x, v)) = (fG(x, v), \pi G(x, v))$, quindi $x = f \circ G(x, v)$ che è la tesi.

Definizione 2.8 *Sia $f : X \to Y$ tra varietà; $p \in X$ si dice* ***punto critico*** *per f se df_p non è suriettivo,* ***regolare*** *se lo è. L'immagine tramite f dei punti critici definisce l'insieme dei* ***valori critici****. $q \in Y$ si dice* ***valore regolare*** *se non è un valore critico. Equivalentemente q un valore regolare se e solo se TUTTI i punti in $f^{-1}(q)$ sono regolari*

Esempio: Sia $q \notin Imf \Rightarrow q$ è regolare.

Teorema 2.0.11 *Sia $f : X \to Y$ tra varietà, $m = dimX$, $n = dimY$. Sia $q \in Y$ un valore regolare, allora $f^{-1}(q)$ è una varietà (chiusa) di dimensione $m - n$. Inoltre, $\forall p \in f^{-1}(q)$ vale $T_p(f^{-1}(q)) = Kerdf_p$*

Dimostrazione: Sia $M = f^{-1}(q) \subseteq X$. Dato $p \in M$, per il teorema precedente esistono certe $\varphi : U_p \to \Omega_1$ e $\psi : V_q \to \Omega_2$ tali che $\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \Omega_1 \to \Omega_2$ è la proiezione sulle prime n coordinate. Adesso $M \cap U_p$ è aperto di M ed è diffeomorfo a $\varphi(M \cap U_p)$. Mi basta dire che $\varphi(M \cap U_p) = \varphi(f^{-1}(q) \cap U_p) = (\psi \circ f \circ \varphi^{-1})^{-1}(\psi(q))$ e dunque è la preimmagine di un punto tramite una proiezione (intersecata Ω_1) cioè un aperto di uno spazio affine della giusta dimensione. Mostriamo che $T_p(M) = Kerdf_p$. Sia $p \in M$, $\forall \gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ con $\gamma(0) = p \to (f \circ \gamma) = q$ costante e dunque derivando $(f \circ \gamma)'(0) = 0 = df_p(\gamma'(0)) \Rightarrow T_p(M) \subseteq Kerdf_p$ da cui si ottiene l'uguaglianza per motivi dimensionalei.

Osservazione: Se $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \Rightarrow df_p = {}^t(\nabla f)_p$ gradiente di f in p. Dunque $Kerdf_p = \nabla f_p^{\perp}$. Dunque p è punto regolare se e solo se $\nabla f_p \neq 0$ e se q è valore regolare, allora $p \in f^{-1}(q) = M$ e $T_p(M) = \nabla f_p^{\perp}$.

Esempio: Mostriamo che S^n è una $n-$varietà e $T_p(S^n) = p^{\perp}$ per ogni p. Infatti, posto $f : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ tale che $f(x) = \|x\|^2$ che è una funzione $C^{\infty} \Rightarrow S^n = f^{-1}(1)$ e ${}^t(\nabla f)_p = (2p_1, ..., 2p_n)$ che si annulla se e solo se $p = 0$. Ma $f(0) = 0 \neq 1$ e dunque 1 è un valore regolare. Dunque, per il teorema precedente, S^n è una n varietà e $T_p(S^n) = 2p^{\perp} = p^{\perp}$.

Esempio: Consideriamo $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 - z^2 = 1\}$. Questa è una 2-varietà: consideriamo $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tale che $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$, allora $f^{-1}(1) = M$ e 1 è regolare poiché $\nabla f_p = (2p_x, 2p_y, -2p_z)$ e si annulla solo in 0. Se facciamo la preimmagine di 0 abbiamo un cono che non è una varietà!

Esercizio 2.0.2 *Dimostrare che le quadriche non degeneri sono varietà*

Svolgimento:

Definizione 2.9 *Un* ***gruppo di Lie*** *G è una varietà C^{∞} con una struttura di gruppo tale che le funzioni $m : G \times G \to G$ tale che $m(g_1, g_2) = g_1 g_2$ e $i : G \to G$ tale che $i(g) = g^{-1}$.*

Esempio: $GL_n(\mathbb{R})$ è un gruppo di Lie di dimensione n^2 in quanto è un aperto di $M_n(\mathbb{R})$ (aperto perché è controimmagine di $\mathbb{R} - \{0\}$ tramite la funzione determinante e le operazioni sono C^{∞} perché il prodotto è un polinomio e l'inversa è una razionale con denominatore diverso sempre da 0.

Definizione 2.10 *Sia G un gruppo di Lie, $g \in G \Rightarrow$ le mappe $L_g : G \to G$ e $R_g : G \to G$ tali che $L_g(h) = gh$ e $R_g(h) = hg$ sono detti* ***moltiplicazione a sinistra*** *e* ***moltiplicazione a destra****. Le due funzioni sono C^∞ e sono diffeomorfismi poiché $(L_g)^{-1} = L_{g^{-1}}$.*

Definizione 2.11 *Un* ***omomorfismo di gruppi di Lie*** *è un omomorfismo di gruppi C^∞*

Proposizione 2.0.12 *Sia $f : G \to H$ omomorfismi di gruppi di Lie, allora $rkdf_g$ è costante, cioè non dipende da g*

Dimostrazione: f omomorfismo implica che $\forall g, h \in G$ $f(gh) = f(g)f(h)$ cioè $f \circ L_g = L_{f(g)} \circ f$ per ogni $g \in G$. Differenziando nell'identità di G otteniamo per ogni $g \in G$

$$df_g \circ (dL_g)_e = d(f \circ L_g)_e = d(L_{f(g)} \circ f)_e = (dL_{f(g)})_{f(e)} \circ df_e$$

A questo punto i dL sono degli isomorfismi e pertanto il rango di df_g è costantemente uguale a df_e per ogni $g \in G$

Definizione 2.12 *Definiamo il gruppo di matrici $SL_n(\mathbb{R}) = \{A \in GL_n(\mathbb{R}) | detA = 1\}$;*

Esercizio 2.0.3 *Sia $f : M \to N$ tra varietà con df identicamente nullo, allora f è costante*

Svolgimento: Passando in carta otteniamo una funzione da $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ con differenziale nullo. Per il teorema di Lagrange posso dire che la funzione è costante su ogni componente vettoriale dell'immagine.. posso dire di più? si perché nel caso in considerazione vado in $\mathbb{R}$ e quindi vale effettivamente Lagrange.

Proposizione 2.0.13 *Il gruppo $SL_n(\mathbb{R})$ è un gruppo di Lie di dimensione (come varietà) $n^2 - 1$.*

Dimostrazione: Per Binet, è un sottogruppo di $GL_n(\mathbb{R})$ e dunque la moltiplicazione tra due elementi e l'inverso sono già funzioni C^∞ per default. Mi basta dunque mostrare che è una varietà della dimensione che voglio: considero la funzione $det : GL_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^*$ e osservo che $SL_n(\mathbb{R})$ è $det^{-1}(1)$. Pertanto se mostro che 1 è un valore regolare ottengo che $SL_n(\mathbb{R})$ è una varietà di dimensione $n^2 - 1$. Osservo che la funzione determinante è un omomorfismo tra gruppi di Lie $(GL_n(\mathbb{R})$ e R^* e dunque il $rk(d(det)_A)$ non dipende dalla matrice A scelta. Osserviamo inoltre che $d(det)_A : T_A(GL_n(\mathbb{R})) = \mathbb{R}^{n^2} \to T_{detA}(\mathbb{R}^*) = \mathbb{R}$ perché sono aperti negli spazi. Questo significa che il rango della matrice differenziale o è sempre 1 o è sempre 0. Vorrei mostrare che questo rango è sempre 1 per dire che il differenziale è sempre surgettivo. Supponiamo che $d(det)_A = 0$ per ogni $A \in GL_n(\mathbb{R})$, allora la funzione det sarebbe localmente costante per l'esercizio precedente, ma ciò è falso: basta scegliere

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} 1+t & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 \\ \vdots & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix}$$

e dunque $det(\gamma(t)) = 1 + t$ che non è costante in un intorno dell'identità. Dunque il rango è costantemente 1 e si ha la tesi.

Esercizio 2.0.4 *Mostrare che la funzione $d(det)_I : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ è tale che $X \longmapsto tr(X)$.*

Soluzione: Prendiamo una curva $\gamma(t) = I + tX$ e calcoliamo il differenziale con la definizione: ...

Proposizione 2.0.14 *$O(n)$ è un gruppo di Lie di dimensione $\frac{n(n-1)}{2}$;*

Dimostrazione: Come prima, sappiamo che è un sottogruppo di $GL_n(\mathbb{R})$ e pertanto abbiamo già che moltiplicazione e inversione sono funzioni C^∞. Come prima prendiamo una funzione e cerchiamo di vedere $O(n)$ come preimmagine di un valore regolare: se lo facciamo, abbiamo vinto. In particolare scegliamo la funzione $F : GL_n(\mathbb{R}) \to S_n(\mathbb{R})$ con $S_n(\mathbb{R})$ matrici simmetriche, tale che $A \longmapsto^t AA$. Osserviamo che $O(n) = F^{-1}(I)$ e dunque se I è regolare abbiamo la tesi. Questa volta non abbiamo un omomorfismo di gruppi di Lie e pertanto è necessario calcolare "a mano" il differenziale della funzione F in un punto A fissato (e dunque per ogni A) e mostrare che è suriettivo: $dF_A : T_A(GL_n(\mathbb{R})) = M_n(\mathbb{R}) \to T_{F(A)}(S_n(\mathbb{R})) = S_n$ poiché sono spazi vettoriali. Prendiamo allora $X \in T_A(GL_n(\mathbb{R}))$ e calcoliamo $dF_A(X)$: per farlo definiamo la curva $\gamma(t) = A + tX$ (definita in $(-\varepsilon, \varepsilon)$ e dunque, per definizione, $dF_A(X) = (F \circ \gamma)'(0) = ({}^t(A + tX)(A + tX)))'(0) = ({}^tAA + t({}^tAX +^t XA) + (t^2)({}^tXX))'(0) =^t AX +^t XA$. Vogliamo adesso mostrare che questa mappa è suriettiva, ovvero che per ogni $S \in S_n(\mathbb{R})$, esiste una $X \in M_n(\mathbb{R})$ tale che ${}^tAX +^t XA = S$. Per farlo mi basta scegliere $X = \frac{AS}{2}$ e si ha la tesi. Quindi il differenziale in A è suriettivo per ogni A e dunque l'identità è un valore regolare. La sua preimmagine è esattamente il gruppo ortogonale che è pertanto una varietà di dimensione $n^2 - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$.

Osservazione: Abbiamo anche mostrato qualcosa di più, ovvero il $T_I(O(n))$ sono le matrici antisimmetriche: infatti $X \in T_I(O(n)) = Ker(dF_I) \Leftrightarrow 0 = dF_I \Leftrightarrow^X +X = 0 \Leftrightarrow^t X = -X \Leftrightarrow X$ antisimmetrica. In particolare se partiamo dall'identità e ci muoviamo in $O(n)$, la velocità iniziale è una matrice antisimmetrica.

Osservazione: Per le varietà vale che: connesso $\Leftrightarrow$ connesso per archi C^0 $\Leftrightarrow$ connesso per archi C^∞ a tratti $\Leftrightarrow$ connesso per archi C^∞. (le implicazioni su $\mathbb{R}^n$ sono banali perché R^n è localmente connesso per archi, l'ultima basta usare un trucco (che rivedremo) cioè azzero la velocità nei punti singolari e poi riparto girando).

Proposizione 2.0.15 *$O(n)$ ha due componenti connesse che sono $SO(n)$ e $O(n) - SO(n)$*

Dimostrazione: Mostriamo l'enunciato per pezzi:

1. $SO_n(\mathbb{R})$ **è connesso (per archi):** Definiamo per ogni $\theta \in \mathbb{R}$ la matrice

$$rot(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

che rappresenta la rotazione di un angolo θ. Data una $A \in SO(n)$ il mio scopo è congiungerla alla identità con un arco. Dai teoremi di geometria 1 sappiamo che esiste una $B \in O(n)$ tale che

$$BAB^{-1} = \begin{pmatrix} rot(\theta_1) & & & & & \\ & rot(\theta_2) & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & rot(\theta_j) & & \\ & & & & I_h & \\ & & & & & -I_k \end{pmatrix}$$

In realtà, dato che il determinante della matrice deve essere 1 trovo che $k = 2p$ e posso quindi sostituire la diagonale grande $2p$ con p blocchi uguali a $rot(\pi)$. La forma canonica ha pertanto rotazioni e identità. Vogliamo adesso connettere l'identità con questa matrice e poi tramite coniugio (che è una funzione continua) la riportiamo su A. Scelgo quindi la funzione $\gamma : [0,1] \to SO_n(\mathbb{R})$ tale che

$$\gamma(t) = B^{-1} \begin{pmatrix} rot(t\theta_1) & & & \\ & rot(t\theta_2) & & \\ & & & \\ & & rot(t\theta_j) & \\ & & & I_h \end{pmatrix} B$$

Vale banalmente che $\gamma(0) = I$ e $\gamma(1) = A$. L'immagine di $\gamma(t)$ appartiene a $SO_n(\mathbb{R})$ per ogni $t \in [0,1]$ e γ è una funzione continua. Si ha quindi la tesi.

2. $O(n) - SO(n)$ **è connesso:** Consideriamo la matrice $B : O(n) - SO(n)$ e l'applicazione continua $L_B : O(n) \to O(n)$ tale che $A \longmapsto BA$. Questa applicazione scambia $SO(n)$ con il suo complementare ed è una applicazione continua; dato che l'immagine di un connesso è connessa, allora $O(n) - SO(n)$ è connessa

3. $O(n)$ **non è connesso:** Basta considerare che $O(n)$ è la controimmagine dell'insieme sconnesso $\{-1, 1\}$ attraverso la funzione continua determinante; pertanto $O(n)$ è sconnesso ed è unione delle due componenti connesse $SO(n)$ e $O(n)$.

Proposizione 2.0.16 *$GL_n(\mathbb{R})$ si retrae per deformazione forte su $O(n)$ in modo che GL^+ si retrae su $SO(n)$ e GL^- si retrae su $O(n) - SO(n)$; cioè esiste $F : GL_n(\mathbb{R}) \times [0,1] \to GL_n(\mathbb{R})$ continua, tale che $F(A,0) = A$ e $F(A,1) \in O(n)$ $A \in GL_n(\mathbb{R})$ e inoltre $F(A,t) = A \forall A \in O(n), t \in [0,1]$.*

Dimostrazione: Vogliamo usare in maniera continua l'algoritmo di Gram-Schimdt: data una matrice $A = (v_1|...|v_n) \in GL_n(\mathbb{R})$, allora $v_1, ..., v_n$ è una base di $\mathbb{R}^n$. Ricordiamo i primi passi dell'algoritmo di Gram-Schimdt che porta una base dello spazio in una base ortonormale dello spazio (quindi nel nostro caso porta una matrice $A \in GL_n(\mathbb{R})$ in una matrice di $O(n)$:
$v_1' = \frac{v_1}{\|v_1\|}$
$v_2'' = v_2 - < v_2, v_1' > v_1' \longrightarrow v_2' = \frac{v_2''}{\|v_2''\|}$
$v_3'' = v_3 - < v_3, v_1' > v_1' - < v_3, v_2' > v_2' \longrightarrow v_3' = \frac{v_3''}{\|v_3''\|}$
Osserviamo che tutte le operazioni sono funzioni C^∞ e che, inoltre, è garantito ad ogni passo che sia ancora una base dal fatto che viene mantenuto il v_i corrente svincolato dalle varie operazione (viene conservata la bandiera. A questo punto implementiamo dinamicamente (cioè in funzione del tempo) l'algoritmo. Dividiamo l'intervallo $[0,1]$ in k intervalli e agiamo in questo modo: in $[t_0, t_1]$ normalizzo il primo vettore; in $[t_1, t_2]$ ortogonalizzo il secondo vettore e in $[t_2, t_3]$ lo normalizzo. Continuo questo procedimento fino a aver ortonormalizzato tutta la base nell'intervallo $[0,1]$. Questo algoritmo implementato in questo modo dinamico crea l'omotopia cercata.

Osservazione: In realtà F è anche C^∞ su $GL_n(\mathbb{R}) \times [0,1]$ per qualche partizione $0 = t_0 \leq ... \leq t_n = 1$.

Corollario 2.0.17 *Il gruppo $GL_n(\mathbb{R})$ ha due componenti connesse, GL^+, GL^-*

Dimostrazione: $F(\cdot,t)$ è una equivalenza omotopica tra $GL_n(\mathbb{R})$ e $O(n)$ e pertanto preserva le componenti connesse e le componenti connesse per archi.

Fatti:

1. $SO(2)$ è diffeomorfo a S^1 tramite il diffeomorfismo (è banalmente iniettiva, suriettiva e C^∞): $S^1 \to SO(2)$ tale che $(x,y) \longmapsto \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$

2. $SO(3)$ è omeomorfo a $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$. Consideriamo il disco $D^3 = \{v \in \mathbb{R}^3 | \|v\| \leq 1\}$ e costruiamo la seguente mappa $\psi : D^3 \to SO(3)$ tale che $0 \neq v \longmapsto$rotazione di asse $span(v)$ e angolo $\pi\|v\|$ "positiva rispetto a v" e $\psi(0) = id$. ψ è suriettiva e dato che vado da un compatto ad un Hausdorff la funzione si fattorizza al quoziente come un omeomrfismo; il quoziente è esattamente il disco in cui identifico i punti antipodali di norma massima e questa è la definizione di $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$

Definizione 2.13 *Sia $M \subseteq \mathbb{R}^N$ una k-varietà. Allora un* ***campo tangente*** *(a volte detto semplicemente* ***campo****) è una funzione C^∞ $v : M \to \mathbb{R}^N$ tale che $v(p) \in T_p(M), \forall p \in M$. Un* ***campo normale*** *è una funzione C^∞ $n : M \to \mathbb{R}^N$ tale che $n(p) \in (T_p(M))^\perp$ per ogni $p \in M$.*

Esempio: Due campi normali di S^n sono: $n_1, n_2 : S^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ t.c. $n_1(p) = p$ e $n_2(p) = -p$.

Definizione 2.14 *Un* ***frame*** *di una varietà M di dimensione k è una k-upla di campi tangenti $v_1, ..., v_k$ tali che $v_1(p), ..., v_k(p)$ sia una base di $T_p(M)$ per ogni $p \in M$. Un* ***frame locale*** *è un frame su un qualche aperto di M*

Definizione 2.15 *Una varietà M si dice* ***pettinabile*** *se esiste un campo tangente v su M tale che $v(p) \neq 0$ per ogni $p \in M$. M si dice* ***parallelizzabile*** *se ammette un frame globale.*

Osservazione: Una varietà parallelizzabile è pettinabile: basta scegliere v_1 del frame per avere la tesi perché per essere una base v_1 deve essere diverso da 0 per ogni $p \in M$

Proposizione 2.0.18 *La sfera S^2 non è pettinabile (e dunque nemmeno parallelizzabile)*

Dimostrazione: Consideriamo il fibrato unitario $U = (p, v) | p \in S^2, v \in T_p(S^2), \|v\| = 1 \subseteq \S^2 \times \mathbb{R}^3$. Mostriamo come primo fatto che U è diffeomorfo a $SO(3)$: osserviamo che se $(p, v) \in U$, allora $p \perp v$ e sono entrambi unitari: definiamo la mappa $f : U \to SO(3)$ tale che $(p, v) \longmapsto (p|v|p \wedge v)$. Per l'osservazione fatta, questa è una mappa ben definita ($p \wedge v$ è l'unico vettore che completa a base ortonormale positiva il sistema (p, v)), è banalmente C^∞, è suriettiva e iniettiva: la sua inversa è tale che $(v_1|v_2|v_3) \longmapsto (v_1, v_2)$ ed è continua e C^∞. Vale dunque che U è diffeomorfo a $SO(3)$.
Supponiamo adesso per assurdo che S^2 sia pettinabile, ovvero esiste $v : S^2 \to \mathbb{R}^2$ tale che $v(p) \neq 0$ per ogni $p \in S^2$. A meno di normalizzare v (lo posso fare perché è una funzione C^∞), vale che, per ogni $p \in S^2$, $(v(p), p \wedge v(p))$ è un frame su S^2 in quanto $v(p)$ è sempre diverso da 0. (trovare un frame significa banalizzare il fibrato). Definiamo allora la mappa $\psi : S^2 \times S^1 \to U$ tale che $(p, \cos\theta, \sin\theta) \longmapsto (p, v(p)\cos\theta + p \wedge v(p)\sin\theta)$. Poiché $v(p), p \wedge v(p)$ sono una base ortonormale di $\mathbb{R}^2 = T_p(S^2)$ ho una bigezione continua da un compatto a uno spazio $T2$ ed è pertanto un omeomorfismo. Vale quindi che U è omeomorfo a $S^2 \times S^1$. Abbiamo però un assurdo in quanto il gruppo fondamentale di $SO(3) \cong \mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ è $\mathbb{Z}/(2)$, mentre il gruppo fondamentale di $S^2 \times S^1$ è $\mathbb{Z}$. Dunque la sfera non è pettinabile.

Definizione 2.16 *Sia M una k-varietà, una* ***orientazione*** *su M è la scelta di una orientazione su $T_p(M)$ per ogni $p \in M$ in modo che la scelta sia* ***localmente coerente****, cioè $\forall p \in M$ esiste un intorno aperto U_p di p e un frame locale $(v_1, ..., v_k) : U \to \mathbb{R}^N$ tale che $(v_1(q), ..., v_k(q))$ sia positiva per ogni $q \in U_p$.*

Definizione 2.17 *Sia $\varphi : \Omega \to U \subseteq M$ una parametrizzazione locale (inversa della carta n.d.r.) e sia Ω*
subseteq$\mathbb{R}^k$ con $k = dimM$. Si dice che

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_i} \circ \varphi^{-1}, ... \frac{\partial\varphi}{\partial x_n} \circ \varphi^{-1} = d\varphi_{\varphi^{-1}()}(e_1), ..., d\varphi_{\varphi^{-1}()}(e_1)$$

è il ***frame indotto da φ su*** *U*

Definizione 2.18 *Sia M una $k-$varietà: un **atlante orientato** su M è un atlante $\{U_i, \varphi_i\}$ di M tale che $Jac(\varphi_j \varphi_i^{-1})_p$ abbia determinante positivo per ogni $p \in \varphi_i(U_i \cap U_j)$.*

Lemma 2.0.19 *Sia $\{(U_i, \varphi_i)\}$ un atlante orientato, allora esiste una orientazione su M per cui i frames locali associati alle φ_i siano positivi in ogni punto. Tale orientazione prende il nome di **orientazione indotta dall'atlante***

Dimostrazione: per ogni $p \in M$ voglio mostrare che le basi definite dalle φ_i su $T_p(M)$ sono equivalenti: se dimostra questo ho finito perché dichiarandole positive ho, per costruzione, una scelta dell'orientazione dei $T_p(M)$ localmente coerente (questa cosa funziona grazie a frames locali indotti: dichiarando che i frames nel punto p di intersezione sono equivalenti ho la buona definizione e ho vinto). Siano allora $\varphi_i : U_i \to \Omega_i$ e $\varphi_j : U_j \to \Omega_j$ carte dell'atlante; per $p \in U_i \cap U_j$ devo confrontare

$$(d\varphi_i^{-1}(e_1), ..., d\varphi_i^{-1}(e_k)) \quad in \quad \varphi_j(p)$$

$$(d\varphi_j^{-1}(e_1), ..., d\varphi_j^{-1}(e_k)) \quad in \quad \varphi_j(p)$$

che sono le basi indotte dalle carte. Queste basi sono equivalenti se e solo se sono equivalenti le loro immagini tramite l'isomorfismo $(d\varphi_j)_p$ e le immagini sono:

$$(d(\varphi_j \circ \varphi_i^{-1})(e_1), ..., d(\varpi_j \circ \varphi_i^{-1})(e_k))$$

e $(e_1, ..., e_k)$ che sono equivalenti per definizione di atlante orientato (la Jacobiana è proprio la matrice del cambio di base) e quindi si ha la tesi.

Definizione 2.19 *Una varietà M si dice **orientabile** se ammette una orientazione, si dice **orientata** se è dotata di una precisa orientazione.*

Proposizione 2.0.20 *M $k-$varietà è orientabile $\Leftrightarrow$ M ammette un atlante orientato*

Dimostrazione: **(**$\Leftarrow$**)**Segue direttamente dal lemma;
($\Rightarrow$**)**Supponiamo che M sia una varietà orientata e prendiamo un atlante qualsiasi $\{(U_i, \varphi_i)\}$. Possiamo supporre a meno di restringere gli aperti e aumentare il numero di carte che gli U_i siano connessi per ogni i. A partire da questo atlante ne voglio costruire uno orientato. Mostriamo che $(d\varphi_i)_p$ o è positivo per ogni $p \in U_i$ o è negativo per ogni $p \in U_i$: infatti, a meno di restringere ulteriormente gli U_i, posso assumere che esista un frame $(v_1, ..., v_k) : U_i \to \mathbb{R}^N$ che induce l'orientazione di $T_p(M)$ per ogni $p \in U_i$ (è la locale coerenza che ho per ipotesi). Allora

$$A = (d\varphi_i)_p(v_1(p)), (d\varphi_i)_p(v_2(p))..., (d\varphi_i)_p(v_k(p))$$

è una base di $\mathbb{R}^k$ perché immagine di una base che dipende in maniera C^∞ da p. Per cui la funzione che manda $p \longmapsto detA$ è continua e non si annulla mai e dunque, per la connessione di U_i il det è sempre positivo o sempre negativo. Questo mi implica che o $d\varphi_i$ è maggiore di 0 in ogni punto o è minore di 0 in ogni punto; adesso se $d\varphi_i > 0$ in ogni punto $\psi_i = \varphi_i$, se invece $d\varphi_i < 0$, allora pongo $\psi_i = r \circ \varphi_i$ dove r è una riflessione di $\mathbb{R}^k$ che ha determinante negativo. Scegliendo adesso l'atlante $\{(U_i, \psi_i)\}$ si ha la tesi in quanto tutte le ψ_h hanno differenziale con determinante positivo.

Proposizione 2.0.21 *Sia M una varietà connessa e orientabile, allora M ammette esattamente 2 orientazioni.*

Dimostrazione: Ne ammette almeno una per definizione, inoltre, invertendo il primo elemento del frame, ne ammette anche un'altra. Dette O_1 e O_2 le due orientazioni scelte, se esistesse una terza orientazione O_3 allora grazie alla locale coerenza avrei che O_3 e O_1 coincidono su un aperto e allo stesso modo O_2 e O_3 coincidono su di un aperto. Ho dunque una partizione di M in due aperti e, per la connessione, O_3 deve coincidere con una delle due orientazioni

Proposizione 2.0.22 *Sia $M \subseteq \mathbb{R}^N$ una ipersuperficie (cioè $dimM = N-1$), allora M è orientabile $\Leftrightarrow$ ammette un campo normale mai nullo*

Dimostrazione: ($\Leftarrow$)da rifare bene
($\Rightarrow$) Per ipotesi, esiste un ricoprimento di $\{U_i\}$ di M tale che per ogni U_i sia definito un frame $v_1^i, ..., v_{N-1}^i : U_i \to \mathbb{R}^N$ tale che se $p \in U_i \cap U_j$ allora le basi $v_1^i(p), ..., v_{N-1}^i(p)$ e $v_1^j(p), ..., v_{N-1}^j(p)$ basi di $T_p(M)$ sono equivalenti. Posso supporre i frames orotnormali applicando l'algoritmo di Gram-Schimdt, che non muta le classi di equivalenza (la matrice del cambiamento di base è una matrice triangolare superiore il cui determinante è positivo). Pongo adesso $N_i : U_i \to \mathbb{R}^N$ con $N_i(p) = v_1^i \wedge ... \wedge v_{N-1}^i$ e ottengo un campo normale unitario (e quindi mai nullo) e tale che per ogni $p \in U_i$ $v_1^i(p), ..., v_{N-1}^i(p), N_i(p)$ è una base ortonormale positiva di $\mathbb{R}^N$. N_i è C^∞ e per concludere devo far vedere che $N_i = N_j$ su $U_i \cap U_j$. Sia a questo punto A la matrice del cambio di base tra i v_h^i e i v_h^j che, dato che i frames sono equivalenti, ha determinante maggiore di 0. Osserviamo che $N_i(p)$ e $N_j(p)$ sono vettori unitari di $(T_p(M))^\perp$ (che ha dimensione 1) e dunque si ha la relazione $N_i(p) = \pm N_j(p)$. La matrice del cambiamento di base tra $v_1^i, ..., v_{N-1}^i, N_i$ e $v_1^j, ..., v_{N-1}^j, N_j$ è una matrice a blocchi del tipo $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix}$ dove $N_i(p) = \varepsilon N_j(p)$. Il suo determinante è positivo poiché le basi sono state entrambe completate con il prodotto vettore e pertanto sono entrambe basi ortonormali positive. Dato che sappiamo che $detA > 0 \Rightarrow \varepsilon > 0$ e questo coincide col dire che $N_i = N_j$. Posto adesso il campo normale come $N : M \to \mathbb{R}^N$ in modo che $N_{|U_i} = N_i$ si ha una buona definizione e la tesi.

Corollario 2.0.23 *Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ aperto, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ (ho bisogno di f C^∞?) e sia λ un valore regolare, allora $f^{-1}(\lambda) = M$ è una $N^2 - 1$ varietà orientabile.*

Dimostrazione: Sappiamo già che è una varietà della dimensione giusta per un lemma già dimostrato. Per dire che è orientabile è sufficiente trovare un campo normale. Definisco allora per ogni p il campo normale $N : M \to \mathbb{R}^N$ dove $N(p) = (\nabla f)_p = {}^t(df)_p$. Poiché λ è regolare, allora $N(p) \neq 0$ per ogni p. Inoltre $T_p(M) = (\nabla f)_p^\perp \Rightarrow N(p) \in (T_p(M))^\perp$ e N è C^∞.

Osservazione: S^n e $SL_n(\mathbb{R})$ sono varietà orientabili, in quanto luoghi di zeri regolari (rispettivamente della funzione norma-1 e della funzione determinante-1.

Osservazione: Una varietà parallelizzabile è orientabile (il viceversa è falso, la sfera n-dimensionale ne è un controesempio.

Capitolo 3

Teoria Metrica delle superfici

In questo capitolo studieremo le 2-varietà in $\mathbb{R}^3$ dal punto di vista metrico. Per tutto il resto del capitolo chiameremo $S \subseteq \mathbb{R}^3$ una **superficie**, ovvero una varietà 2-dimensionale. Per comodità supponiamo S sempre orientata coerentemente con un campo normale N (come appena visto), cioè v_1, v_2 sono una base positiva di $T_p(S) \Leftrightarrow v_1, v_2, N(p)$ è una base positiva di $\mathbb{R}^3$

Definizione 3.1 *Chiameremo **I forma fondamentale** la restrizione a $T_p(S)$ del prodotto scalare standard di $\mathbb{R}^3$. In particolare se $\varphi : \Omega \to U \subseteq S$ è una parametrizzazione locale, essa induce un frame che è $(\frac{\partial \varphi}{\partial u} \circ \varphi^{-1}, \frac{\partial \varphi}{\partial v} \circ \varphi^{-1})$ (u, v sono le coordinate standard che adotteremo per Ω. I coefficienti della I forma fondamentale rispetto a φ (rispetto alla base di $T_p(S)$ indotta da φ) sono:*

$$E =< \frac{\partial \varphi}{\partial u}, \frac{\partial \varphi}{\partial u} > \quad F =< \frac{\partial \varphi}{\partial u}, \frac{\partial \varphi}{\partial v} > \quad G =< \frac{\partial \varphi}{\partial v}, \frac{\partial \varphi}{\partial v} >$$

e la sua rappresentazione matriciale (in questa base) è pertanto:

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$$

Osserviamo che E, F, G sono funzioni che partono da Ω e finiscono in $\mathbb{R}$. Si indica con $I(z, w)$

N.B.: A volte si confondono le funzioni definite su Ω con quelle corrispondenti (tramite φ e φ^{-1}) definite su U. A volte non è un problema, ma quando si deriva mi raccomando stai attento!

Definizione 3.2 *Chiamiamo **mappa di Gauss** la mappa $N : S \to S^2$ dove N è il campo unitario coerente con l'orientazione di S. (la penso come una funzione da una superficie a una superficie)*

Osservazione: Dalle definizioni discende direttamente che $T_p(S) = N(p)^{\perp} = T_{N(p)}(S^2)$, dunque $dN_p : T_p(S) \to T_{(N_p)}(S^2)$ è un endomorfismo di $T_p(S)$

Proposizione 3.0.1 *dN_p è un endomorfismo autoggiunto per ogni $p \in S$.*

Ricordiamo che f è autoaggiunto se e solo se $< v, f(w) >=< f(v), w >$ per ogni v, w. Dobbiamo dunque verificare che $< dN_p(v), w >=< v, dN_p(w) >$ per una base $v, w \in T_p(S)$. Come base, fisso una parametrizzazione locale φ intorno a p e come base prendo il frame indotto $(\frac{\partial \varphi}{\partial u} \circ \varphi^{-1}, \frac{\partial \varphi}{\partial v} \circ \varphi^{-1})$. Devo dunque controllare l'uguaglianza $< dN_p(\frac{\partial \varphi}{\partial u} \circ \varphi^{-1}), \frac{\partial \varphi}{\partial v} \circ \varphi^{-1} >=< \frac{\partial \varphi}{\partial u} \circ \varphi^{-1}), dN_p(\frac{\partial \varphi}{\partial v} \circ \varphi^{-1}) >$ in p e questa è vera se e solo se $< dN_p(\frac{\partial \varphi}{\partial u}), \frac{\partial \varphi}{\partial v} >=< \frac{\partial \varphi}{\partial u}, dN_p(\frac{\partial \varphi}{\partial v}) >$ in $\varphi^{-1}(p)$ che è vera se e solo se $< \frac{\partial N \circ \varphi}{\partial u}, \frac{\partial \varphi}{\partial v} >=< \frac{\partial \varphi}{\partial u}, \frac{\partial N \circ \varphi}{\partial v} >$.

Consideriamo allora la funzione $< N \circ \varphi, \frac{\partial \varphi}{\partial u} >$ che è costantemente nulla su Ω poiché $N \circ \varphi$ è normale a $\varphi(p)$. Derivando rispetto a v tale funzione si ottiene

$$0 =< \frac{\partial N \circ \varphi}{\partial v}, \frac{\partial \varphi}{\partial u} > + < N \circ \varphi, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v} >$$

Allo stesso modo consideriamo la funzione $< N \circ \varphi, \frac{\partial \varphi}{\partial v} >$ che è costantemente nulla e derivando questa volta rispetto a u si ottiene:

$$0 =< \frac{\partial N \circ \varphi}{\partial u}, \frac{\partial \varphi}{\partial v} > + < N \circ \varphi, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v \partial u} >$$

Utilizzando adesso il teorema di Schwartz di commutazione delle derivate e confrontando le due equazioni si ha la tesi.

Definizione 3.3 *Chiamiamo **II forma fondamentale** su $T_p(S)$ la forma bilineare ottenuta "twistando" la I forma fondamentale con dN_p cioè: $II(w, z) = I(w, -dN_p(z)) = - < w, dN_p(z) >$. Osserviamo che per la proposizione precedente la II forma fondamentale è un prodotto scalare generico. I coefficienti della II forma fondamentale (rispetto al frame indotto da φ) sono:*

$$e = II(\frac{\partial \varphi}{\partial u}, \frac{\partial \varphi}{\partial u}) = - < \frac{\partial \varphi}{\partial u}, dN_p \frac{\partial \varphi}{\partial u} > =< \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2}, N \circ \varphi >$$

$$f = II(\frac{\partial \varphi}{\partial u}, \frac{\partial \varphi}{\partial v}) = - < \frac{\partial \varphi}{\partial u}, dN_p \frac{\partial \varphi}{\partial v} > =< \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v}, N \circ \varphi >$$

$$g = II(\frac{\partial \varphi}{\partial v}, \frac{\partial \varphi}{\partial v}) = - < \frac{\partial \varphi}{\partial v}, dN_p \frac{\partial \varphi}{\partial v} > =< \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2}, N \circ \varphi >$$

Dove i coefficienti sono stati ottenuti con lo stesso trucco usato nella proposizione precedente.

Definizione 3.4 *Sia $\gamma : I \to S$ una curva PLA. Si dice **curvatura normale** di γ in t il la funzione $k_n(t) =< \gamma''(t), N(\gamma(t)) >$*

Proposizione 3.0.2 *Sia $\gamma : I \to S$ PLA, allora $k_n(t) = II(\gamma'(t), \gamma'(t))$; in particolare la curvatura dipende unicamente da $\gamma'(t)$ (quindi è una proprietà intrinseca della superficie)*

Dimostrazione: Poiché $\gamma'(t) \in T_{\gamma(t)}(S)$ e $N(\gamma(t)) \in (T_p(S))^\perp$ ho di nuovo l'identità: $0 =< \gamma'(t), N \circ \gamma >$; allora, derivando in t si ha $0 =< \gamma''(t), N(\gamma(t)) > + < \gamma'(t), dN_{\gamma(t)}(\gamma'(t)) >$ che è la tesi.

Il fatto che dN_p sia un endomorfismo autoaggiunto ci dice anche che esiste una base ortonormale di autovettori per dN_p. Possiamo allora dare la seguente:

Definizione 3.5 *Gli autospazi di dN_p prendono il nome di **direzioni principali**, gli autovalori di dN_p si chiamano **curvature principali**. Osserviamo che se $dN_p = \lambda I$ allora tutte le direzioni sono principali; altrimenti ce ne sono esattamente due e sono tra loro ortogonali. Chiamiamo inoltre **curvatura media** la semisomma delle curvature principali (ovvero $\frac{tr(dN_p)}{2}$. Infine il prodotto fra le due curvature principali (ovvero $det(-dN_p) = det(dN_p)$) prende il nome di **curvatura di Gauss** e di solito viene indicata con $k(p)$*

Definizione 3.6 *Sia $\gamma : I \to S$; si dice che gamma è una **linea di curvatura** se $\gamma'(t)$ giace in una direzione principale; si dice **linea asintotica** se $II(\gamma'(t), \gamma'(t)) = 0$*

OSSERVAZIONE: Se $\gamma : I \to S$ è una curva PLA e v_1, v_2 una base ortonormale di $T_{\gamma(t)}(S)$ che diagonalizza dN_p, allora $\gamma'(t) = v_1 \cos\theta + v_2 \sin\theta$ per qualche $\theta \in \mathbb{R}$ poiché $v_1, v_2, \gamma'(t)$ hanno tutti norma 1. Otteniamo dunque $II(\gamma'(t), \gamma'(t)) = II(v_1 \cos\theta + v_2 \sin\theta, v_1 \cos\theta + v_2 \sin\theta)$ e per la bilinearità si ha l'uguaglianza con $\cos^2\theta II(v_1, v_1) + \sin^2\theta II(v_2, v_2) + 2\sin\theta\cos\theta II(v_1, v_2) = k_1 \cos^2\theta + k_2 \cos^2\theta$ con k_1, k_2 curvature principali (l'ultima uguaglianza deriva dallo svolgimento della seconda forma con la definizione). Allora tutte le curvature normali sono combinazioni convesse di k_1 e k_2 e inoltre k_1, k_2 sono il massimo e il minimo delle curvature normali passanti per $\gamma(t)$.

ESEMPIO:

1. Sia S una porzione di piano: posso scegliere N =costante. Tutte le curvature di annullano in quanto $dN_p = 0$. Dunque tutte le curvature sono curvature nulle;

2. Sia $S = S^2$; posso porre $N = id$ poiché $(T_p(S))^\perp = span(p) \Rightarrow dN_p = I$ per ogni $p \in S^2$ e le curvature principali sono tutte uguali a -1. La curvatura di Gauss vale invece 1;

3. Consideriamo il cilindro $S = S^1 \times \mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^3$. Chiamiamo $\pi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ la proiezione sulle prime due coordinate: allora $\pi(p) = N(p)$ per ogni $p \in S$. Siccome pi è lineare $dN_p = d\pi_p = \pi_p$ ristretto a un opportuno sottospazio; cerchiamo di capire chi è questo differenziale: per ogni $p \in S$, $T_p(S)$ è generato da due vettori ortonormali v_1, v_2 (che sono il verticale e l'orizzontale. Vale dunque che $dN_p(v_1) = \pi(v_1) = 0$ e $dN_p(v_2) = \pi(v_2) = v_2$ e questa è dunque una base di autovettori. Abbiamo perciò mostrato che le curvature principali sono $k_1 = 0$ e $k_2 = -1$ e la curvatura di Gauss è $k(p) = 0$ per ogni $p \in S$

Definizione 3.7 *Diciamo che un punto $p \in S$ è un punto:*

Planare: *se $dN_p = 0$*

Parabolico: *se $dN_p \neq 0$ ma $k(p) = 0$ (cioè dN_p ha rango 1)*

Ellittico: *Se $k(p) > 0$ (cioè le curvature principali sono concordi non nulle)*

Iperbolico: *Se $k(p) < 0$ (cioè curvature principali discordi non nulle)*

Lemma 3.0.3 *I grafici di funzioni C^∞ da Ω aperto di $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}$ sono superfici*

Dimostrazione: Sia $S = graf(\varphi)$, allora le mappe

$$\begin{array}{ccc} \Omega & \to & S \\ (u,v) & \mapsto & (u,v,\varphi(u,v)) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} S & \to & \Omega \\ (x,y,z) & \mapsto & (x,y) \end{array}$$

sono diffeomorfismi globali. Ho quindi trovato un atlante e mostrate che S è una varietà.

Notazione: D'ora in avanti useremo la notazione X_u per indicare la derivata parziale della funzione U rispetto al vettore u

ESEMPIO: Vogliamo calcolare le curvature principali della sella descritta dal grafico della funzione $\varphi(u,v) = u^2 - v^2$ nel punto $p = (0,0,0)$. consideriamo la parametrizzazione locale (globale) $X : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tale che $X(u,v) = (u, v, u^2 - v^2)$. Applichiamo un metodo generale che sarà comodo anche in altri problemi:

(1) Calcoliamo X_u, X_v e pongo $N = \frac{X_u \wedge X_v}{\|X_u \wedge X_v\|}$ e lo posso fare poiché X_u, X_v è una base dello spazio tangente;

(2) Ricordiamo che $II(a,b) = I(a, -dN_p(b))$; per cui se $A = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix}$ sono le matrici che rappresentano la prima e la seconda forma fondamentale nella base X_u, X_v, allora per

ogni $(w,z) \in \mathbb{R}^2$ deve valere ${}^t wBz = {}^t wA(-M)z$ dove M è la matrice che rappresenta $-dN_p$ nella base X_u, X_v. Vale dunque che $M = -A^{-1}B$. A questo punto il calcolo di dN_p risulta essere molto più facile (computazionalmente) poiché i coefficienti E, F, G, e, f, g sono al più prodotti scalari di derivate parziali di u e v. Osserviamo anche che $det(M) = det(dN_p) = k(p) = \frac{det(B)}{det(A)}$ che è una operazione molto facile.
Adottiamo allora questo algoritmo per quanto riguarda la nostra sella con parametrizzazione locale $X = (u, v, u^2 - v^2)$:
$X_u = (1, 0, 2u)$
$X_v = (0, 1, -2v)$
$N = \frac{(-2u,2v,1))}{\sqrt{1+4(u^2+v^2)}}$
$X_{uu} = (0, 0, 2)$
$X_{uv} = (0, 0, 0)$
$X_{vv} = (0, 0, -2)$
$E =< X_u, X_u >= 1 + 4u^2 \longrightarrow 1$
$F =< X_u, X_v >= -4uv \longrightarrow 0$
$G =< X_v, X_v >= 1 + 4v^2 \longrightarrow 1$
$e =< X_{uu}, N >= \frac{2}{\sqrt{1+4(u^2+v^2}} \longrightarrow 2$
$f =< X_{uv}, N >= 0 \longrightarrow 0$
$g =< X_{vv}, N >= -\frac{2}{\sqrt{1+4(u^2+v^2}} \longrightarrow -2$
e dunque vale che

$$dN_0 = -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Le curvature principali sono pertanto $k_1 = 2, k_2 = -2$; la curvatura di Gauss vale $k(p) = -4$ e il punto è un punto iperbolico.

Osservazione: il determinante della matrice A è sempre positivo poiché è il prodotto scalare di $\mathbb{R}^3$ che è definito positivo; dunque il segno della curvatura di Gauss è determinato solamente dal segno del determinante della matrice della seconda forma fondamentale.

Definizione 3.8 *Sia $\gamma : I \to \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | y = 0, x > 0\}$ un embedding (cioè una curva regolare che è diffeomorfismo con l'immagine); in particolare $\gamma(t) = (\varphi(t), 0, \psi(t))$. L'insieme S ottenuto facendo ruotare il supporto di γ intorno all'asse z prende il nome di* ***superficie di rotazione***. *Prendiamo in particolare il supporto di $X : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ tale che $X(u, v) = (\varphi(u) \cos v, \varphi(u) \sin v, \psi(u))$*

Proposizione 3.0.4 *Opportune restrizioni di X forniscono un atlante per la superficie di rotazione S descritta come nella definizione precedente. Pertanto S è una superficie (nel senso di varietà).*

Dimostrazione: X è una funzione chiaramente suriettiva e C^∞. Posso definire su $S \cap \{x > 0\}$ una sua inversa in questo modo:$S \cap \{x > 0\} \to I \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ tale che $(x, y, z) \mapsto (\gamma^{-1}(\sqrt{x^2 + y^2}, 0, z), \arctan(\frac{y}{x}))$ (stiamo usando che γ è diffeomorfismo con l'immagine e dunque posso prenderne l'inversa). Restringendomi in modo analogo agli altri intervalli di grandezza π si trova una inversa locale di X che copre tutto il dominio e questo fornisce proprio un atlante.

Data adesso la parametrizzazione locale $X(u, v) = (\varphi(u) \cos v, \varphi(u) \sin v, \psi(u))$ di una superficie di rotazione vogliamo calcolare la prima e la seconda forma fondamentale e le curvature:
$X_u = (\varphi' \cos v, \varphi' \sin v, \psi')$
$X_v = (-\varphi \sin v, \varphi \cos v, 0)$
$N = \frac{1}{\sqrt{(\varphi')^2+(\psi')^2}}(-\psi \cos v, -\psi \sin v, \varphi')$

$X_{uu} = (\varphi'' \cos v, \varphi'' \sin v, \psi'')$
$X_{uv} = (-\varphi' \sin v, \varphi' \cos v, 0)$
$X_{vu} = (\varphi \cos v, -\varphi \sin v)$
Da cui:

$$I = \begin{pmatrix} (\varphi')^2 + (\psi')^2 & 0 \\ 0 & \varphi^2 \end{pmatrix} \qquad II = \frac{1}{\sqrt{(\varphi')^2 + (\psi')^2}} \begin{pmatrix} \varphi'\psi'' - \varphi''\psi' & 0 \\ 0 & -\varphi\psi' \end{pmatrix}$$

Da cui otteniamo quello che ci interessa di più ovvero:

$$-dN_p = I^{-1}II = II = \frac{1}{\sqrt{(\varphi')^2 + (\psi')^2}} \begin{pmatrix} \frac{\varphi'\psi'' - \varphi''\psi'}{(\varphi')^2 + (\psi')^2} & 0 \\ 0 & \frac{\psi'}{\varphi} \end{pmatrix}$$

Definizione 3.9 *Data una superficie di rotazione le curve del tipo $t \mapsto X(t, v_0)$ prendono il nome di **meridiani**; le curve del tipo $t \mapsto X(u_0, t)$ prendono il nome di **paralleli**.*

I conti fatti sulle superfici di rotazione e i risultati ottenuti ci mostrano i seguenti fatti:

1. Dato che la prima forma è diagonale, allora i meridiani e i paralleli sono curve tra loro ortogonali;

2. Il fatto che dN_p è diagonale ci dice che X_u, X_v sono autovettori, e dunque meridiani e paralleli sono linee di curvatura

3. Le curvature principali sono:
   $k_1 = \frac{\varphi'\psi'' - \varphi''\psi'}{((\varphi')^2 + (\psi')^2)^{\frac{3}{2}}}$ è la curvatura normale dei meridiani che coincide con la curvatura della superficie a meno del segno (possiamo riconoscere nella formula, la formula della curvatura totale di una curva γ). Curvatura normale dei paralleli coincide pertanto con la curvatura totale.
   $k_2 = \frac{\psi'}{\varphi\sqrt{(\varphi')^2 + (\psi')^2}}$ è la curvatura normale dei paralleli.

4. La curvatura di Gauss ha pertanto la forma:

$$k(p) = k_1 k_2 = -\frac{\psi'(\psi'\varphi'' - \varphi'\psi'')}{\varphi(\varphi')^2 + (\psi')^2}$$

   Se adesso abbiamo che la curva γ è PLA, possiamo usare le relazioni $(\varphi')^2 + (\psi')^2 = 1$ e $2\varphi'\varphi'' + 2\psi'\psi'' = 0$ per ottenere una curvatura di Gauss $k(p) = -\frac{\varphi''}{\varphi}$ che è strettamente legata alla convessità della funzione φ.

Proposizione 3.0.5 *Tutte le grandezze finora introdotte (curvature principali e curvatura di Gauss) sono invarianti per congruenza, cioè se $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ è una isometria positiva, allora le curvature di S in p sono uguali a quelle di $f(S)$ in $f(p)$, dove supponiamo che f preservi le orientazioni di S e $f(S)$, cioè $df_p : T_p(S) \to T_{f(p)}(f(S))$ è positivo per ogni p*

Dimostrazione: Se $f(x) = Ax + b$ con $A \in SO(3)$ allora $df_p = A_{|T_p(S)}$. Sia v_1, v_2 base ortonormale positiva di $T_p(S) \Rightarrow v_1, v_2, N_S(p)$ è una base ortonormale positiva di $\mathbb{R}^3$. Inoltre, poiché $A \in SO(3)$ $Av_1 = df_p(v_1), Av_2 = df_p(v_2), AN_S(p)$ è una base ortonormale positiva di $\mathbb{R}^3$. Ma $df_p(v_1), df_p(v_2)$ sono una base ortonormale positiva di $T_{f(p)}(f(S))$ e dunque per l'unicità del prodotto vettore deve valere che $AN_S(p) = N_{f(S)}(f(p))$ e cioè che $dN_{f(S)}(f(p)) = A \circ dN_s(p) \circ A^{-1}$ che da la tesi.

Proposizione 3.0.6 *Sia $p \in S$ superficie; allora:*

1. *Se $k(p) > 0$, allora S giace localmente tutta da un lato del piano osculatore di S in p;*
2. *Se $k(p) < 0$, allora S giace localmente da entrambi i lati del piano osculatore.*

Dimostrazione: Sia S superficie e $p \in S$. A meno di congruenza (per la proposizione precedente) posso supporre $p = (0,0,0)$ e $N(p) = (0,0,1)$. Dunque $T_p(S) = N(p)^\perp = span((1,0,0),(0,1,0))$ e la proiezione $\pi : \mathbb{R}^3 \to \{z = 0\}$ induce un isomorfismo (che è l'identità) tra $T_p(S)$ e il piano $\{z = 0\}$. Per il teorema di invertibilità locale, esiste $U \subseteq S$ intorno di P tale che $\pi_{|U} : U \to \pi(U)$ è un diffeomorfismo, cioè esiste $\psi : \pi(U) \to U$ diffeomorfismo inversa locale di π. In particolare varrà che $\psi(u,v) = (u,v,h(u,v))$. Abbiamo scoperto che S è localmente il grafico di una funzione C^∞ $h : \pi(U) \to \mathbb{R}$ (abbiamo atto questa cosa in generale, possiamo dunque affermare che una superficie è localmente il grafico di una funzione da U aperto di $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}$). Calcoliamo adesso su ψ la prima e la seconda forma fondamentale:
$\psi_u = (1,0,h_u)$, $\psi_v = (0,1,h_v)$, $\psi_{uu} = (0,0,h_{uu})$, $\psi_{uv} = (0,0,h_{uv})$, $\psi_{vv} = (0,0,h_{vv})$ e $N = (0,0,1)$ per costruzione. Otteniamo dunque che la seconda forma fondamentale di S non è altro che la matrice Hessiana di h. Abbiamo già osservato che il segno della curvatura di Gauss dipende solamente dal segno del determinante della seconda forma fondamentale. Osserviamo che $(0,0)$ è un punto critico per h e dunque dai teoremi di analisi 2 sappiamo che se $H(h)_{(0,0)}$ ha determinante negativo (curvatura di gauss negativa), allora abbiamo in $(0,0)$ una sella, mentre se il determinante di $H(h)_{(0,0)}$, cioè la curvatura di Gauss è positiva, allora si ha un massimo o un minimo locale. Quanto detto di fatto è la tesi perché il piano osculatore in $(0,0)$ è per costruzione il piano $\{z = 0\}$

Definizione 3.10 *Sia $\gamma(t) = \sin t, 0, \cos t + \ln \tan \frac{t}{2})$ la curva trattrice. La superficie di rotazione ottenuta facendo ruotare la trattrice lungo l'asse z prende il nome di **pseudo sfera.***

Teorema 3.0.7 *La pseudo sfera ha curvatura di Gauss costante uguale a -1 per $t \in (0, \frac{\pi}{2}$*

Dimostrazione: Osserviamo che per la geometria della superficie sappiamo già che il segno della curvatura di Gauss deve essere negativo (proposizione precedente) e pertanto in questa dimostrazione ci preoccupiamo soltanto del suo valore in modulo. Per quanto osservato sulle superfici di rotazione sappiamo già quale è il valore di k_1: questo perché k_1 è la curvatura della curva γ e questa l'avevamo già calcolata e valeva: $k_1 = tg(t)$. Cerchiamo adesso k_2 ovvero la curvatura normale del parallelo: i paralleli sono circonferenze di raggio $R = \sin t$ (è la φ della pseudo sfera) e pertanto hanno curvatura totale che vale $k = \frac{1}{\sin t}$. Quello che voglio è però la sua curvatura normale. Siano dunque n versore normale del parallelo e N versore normale a S in $\gamma(t)$, allora $|k_2| = | < kn, N > |$ dove k è la curvatura totale del parallelo (cioè voglio vedere chi è la componente della curvatura totale lungo la direzione N). Ovviamente il vettore $n = (-1,0,0)$ (è il vettore diretto verso il centro del parallelo; resta da calcolare N; per farlo calcoliamo $\gamma'(t) = (\cos t, 0, . \sin t + \frac{1}{\sin t} = \cot t(\sin t, 0, \cos t)$ che è il versore tangente alla trattrice e dunque il normale alla trattrice (che coincide con N) vale $N = (\cos t, 0, -\sin t)$. A questo punto $|k_2| = |\frac{1}{\sin t} < (-1,0,0),(\cos t, 0, -\sin t) > | = \cot t$ e dunque la curvatura di Gauss in modulo sarà $|k_1 k_2| = |\tan t \cot t| = 1$. Dato che abbiamo decretato che il segno deve essere però negativo, si ha la tesi.

Esempi:

1. **Elicoide:** è la rotazione di una retta che sale lungo l'asse z. La sua parametrizzazione è $X(u,v) = v\cos u, v \sin u, u)$. In particolare X è un diffeomorfismo con l'immagine e dunque è una superficie S. Per mostrare che è diffeomorfa all'immagine esibiiamo una inversa definita a tratti: $S - \{\frac{\pi}{2} + k\pi\} \to \mathbb{R}^2$ tale che $(x,y,z) \mapsto (z, \frac{x}{\cos z}$ e $S - \{k\pi\} \to \mathbb{R}^2$ tale che $(x,y,z) \mapsto (x, \frac{y}{\sin z}$. Cerchiamone adesso la curvatura di Gauss:
   $X_u = (-v \sin u, v \cos u, 1)$

$X_v = (\cos u, \sin u, 0)$
$N = \frac{(-\sin u, \cos u, -v)}{\sqrt{1+v^2}}$
$X_{uu} = (-v\cos u, -v\sin u, 0)$
$X_{uv} = (-\sin u, \cos u, 0)$
$X_{vv} = 0$

$$I = \begin{pmatrix} 1+v^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad II = \frac{1}{\sqrt{1+v^2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

E pertanto la curvatura di Gauss è $\frac{det(II)}{det(I)} = -\frac{1}{(1+v^2)^2}$

2. **Catenoide:** La catenoide è la superficie ottenuta facendo ruotare la catenaria (grafico del coseno iperbolico). Consideriamo dunque $X(u,v) = (\cosh u \cos v, \cosh u \sin v, u)$. Sappiamo già essere una superificie poiché è di rotazione; calcoliamone la curvatura di Gauss:
$X_u = (\sinh u \cos v, \sinh u \sin v, 1)$
$X_v = (-\cosh u \sin v, \cosh u \cos v, 0)$
$N = \frac{(-\cos v, -\sin v, \sinh u \cosh u)}{\cosh u}$
$X_{uu} = (\cosh u \cos v, \cosh u \sin v, 0)$
$X_{uv} = (-\sinh u \sin v, \sinh u \sin v, 0)$
$X_{vv} = (-\cosh u \cos v, . \cosh u \sin v, 0)$

$$I = \begin{pmatrix} \cosh^2 u & 0 \\ 0 & \cosh^2 u \end{pmatrix} \qquad II = \frac{1}{\cosh u} \begin{pmatrix} -\cosh u & 0 \\ 0 & \cosh u \end{pmatrix}$$

E pertanto la curvatura di Gauss è $\frac{det(II)}{det(I)} = (-1)\frac{1}{(\cosh^4 u)^2} = -\frac{1}{\cosh^4 u}$

Teorema 3.0.8 *Sia S una superficie compatta, allora esist eun punto $p \in S$ tale che $k(p) > 0$*

Dimostrazione: Sia p un punto di S di massima distanza dall'origine (esiste per la compattezza della superficie). p è diverso dall'origine, altrimenti S non è una superficie. Consideriamo $\gamma : I \to S$ curva generica PLA con $\gamma(0) = p$. Poniamo $f : I \to \mathbb{R}$ tale che $f(t) =< \gamma(t), \gamma(t) >= \|\gamma(t)\|^2$. Allora per costruzione, f ha un max locale in 0 e dunque $f'(0) = 0$ e $f''(0) \leq 0$. Vale dunque che $0 = f'(0) = 2 < \gamma(0), \gamma'(0) >=< p, \gamma'(0) >= 0$ da cui otteniamo che $p \perp \gamma'(0)$ per ogni $\gamma : I \to S$ e dunque $p \in T_p(S)$. Poniamo dunque $N = \frac{p}{\|p\|}$. Inoltre $f''(0) = 2 < \gamma'(0), \gamma'(0) > +2 < \gamma(0), \gamma''(0) >= 1+ < p, \gamma''(0) > \leq 0$ che diventa $< \gamma''(0), \|p\| N(p) > \leq -1$ cioè $< \gamma''(0), p > \leq -\frac{1}{\|p\|}$; dunque tutte le curve passanti per p hanno curvatura normale minore o uguale a $-\frac{1}{\|p\|}$ e questo vale anche per le curvature principali k_1, k_2. Grazie a quanto detto $k(p) = k_1 k_2 \geq \frac{1}{\|p\|^2} > 0$. Osserviamo che abbiamo mostrato un po' di piu, ovvero che esiste un un punto in cui la curvatura è maggiore uguale di $\frac{1}{\|p\|^2}$ con p massima distanza tra un punto a caso nello spazio e la superficie.

Definizione 3.11 *Definiamo* ***distanza intrinseca*** *su una superficie S la funzione $d : S \times S \to \mathbb{R}$ tale che $d(p,q) = \inf\{L(\gamma), \gamma : [0,1] \to S, C^\infty \text{ a tratti}, \gamma(0) = p, \gamma(1) = q\}$*

Osservazione: d è effettivamente una distanza (la simmetria è ovvia, la disuguaglianza triangolare anche). Mostriamo che $d(p,q) = 0 \Rightarrow p = q$. Sappiamo che $\gamma(0) = p$ e $\gamma(q) = 1$ e dunque la distanza è almeno $\|p - q\|$. Passando agli inf si ottiene $\inf d(p,q) \geq \|p - q\| \Rightarrow 0 \geq \|p - q\| \Rightarrow p = q$. Possiamo rimpiazzare nella definizione C^∞ a tratti di *gamma* con C^∞ totale.

Definizione 3.12 *Sia $f : S \to S'$ tra superfici; S è* ***isometria locale*** *se $df_p : T_p(S) \to T_{f(p)}(S')$ è una isometria lineare per ogni $p \in S$. Una* ***isometria*** *è una isometria locale bigettiva.*

OSSERVAZIONE: Se f è una isometria locale, per il teorema di invertibilità locale è un diffeomorfismo locale. Se dunque f è anche bigettiva, la sua inversa è C^∞ e dunque è una isometria

Proposizione 3.0.9 *Sia f una isometria locale, allora $d(f(p), f(q)) \leq d(p, q)$. Se f è isometria, allora $d(p, q) = d(f(p), f(q))$ per ogni $p, q \in S$.*

Dimostrazione: Per ogni γ che congiunge p, q, allora $f \circ \gamma$ congiunge $f(p)$ con $f(q)$ e vale che:

$$L(f \circ \gamma) = \int_0^1 \|(f \circ \gamma)'(t)\| dt = \int_0^1 \|df_{\gamma(t)}(\gamma'(t))\| dt = \int_0^1 \|\gamma'(t)\| dt = L(\gamma)$$

Vale dunque che $d(p, q) = \inf\{L(\gamma)\} = \inf\{L(f \circ \gamma)\} \geq d(f(p), f(q))$. Se f è isometria, applicando lo stesso risultato a f^{-1} si ha che la distanza viene preservata.

Teorema 3.0.10 *Le isometrie con la nostra definizione sono tutte e sole le isometrie di (S, d) come spazio metrico*

Dimostrazione: Una freccia è la dimostrazione precedente, l'altra freccia la assumiamo vera tralasciando la dimostrazione (troppo tecnica)

OSSERVAZIONE: Anche le isometrie locali sono effettivamente le isometrie locali degli spazi metrici e questo risultato segue ancora una volta dal teorema di invertibilità locale

Definizione 3.13 *Due superfici S e S' sono **localmente isometriche** se $\forall p \in S$, $\exists q \in S'$ e aperti $p \in U \subseteq S$ e $q \in V \subseteq S'$ tali che U è isometrico V e viceversa.*

OSSERVAZIONE: Superfici congruenti sono isometriche (il viceversa è falso)

Esercizio 3.0.1 *Il piano $P = \{z = 0\}$ e il cilindro $C = \{x^2 + y^2 = 1\}$ sono localmente isometrici.*

Soluzione: Consideriamo dapprima il piano P e il cilindro C e consideriamo l'applicazione $f : P \to C$ tale che $f(x, y, 0) = (\cos x, \sin y, y)$. Questa è un rivestimento e in particolare è una mappa suriettiva e C^∞. La funzione f una locale isometria in quanto f manda una base ortonormale in una base ortonormale: infatti sia e_1, e_2 una base ortonormale di $T_p(P)$ per ogni $p \in P$, allora $df_p(e_1) = (-\sin x, \cos x, 0)$ e $df_p(e_2) = (0, 0, 1)$ e questa è una base ortonormale di $T_{f(p)}(C)$. Dunque f manda basi ortonormali in basi ortonormali ed è dunque una locale isometria. Dato che la funzione è suriettiva ho anche una isometria locale inversa: questo ci da che le due superfici sono isometriche.

Lemma 3.0.11 *Siano $\varphi : \Omega \to U \subseteq S$ e $\psi : \Omega \to V \subseteq S'$ parametrizzazioni locali, allora $\psi \circ \varphi^{-1}$ è una isometria se e solo se i coefficienti della prima forma rispetto a φ e ψ sono gli stessi.*

Dimostrazione: $d(\psi \circ \varphi^{-1})\frac{\partial \varphi}{\partial u} = d\psi(d\varphi^{-1}(d\varphi(e_1))) = d\psi(e_1) = \frac{\partial \psi}{\partial u}$. Poiché i coefficienti della prima forma sono i prodotti scalari tra $\frac{\partial \varphi}{\partial u}$ e $\frac{\partial \varphi}{\partial v}$ (per φ) e tra $\frac{\partial \psi}{\partial u}$ e $\frac{\partial \psi}{\partial v}$ (per ψ), essi sono uguali se e solo se $d(\psi \circ \varphi^{-1})$ li preserva e cioè se e solo se $d(\psi \circ \varphi^{-1})$ è una isometria lineare.

Corollario 3.0.12 *S e S' sono localmente isometriche $\Leftrightarrow$ $\forall p \in S$ esiste $U_p \ni p$ aperto in S, $q \in S'$ e $U_q \ni q$ aperto in S' e parametrizzazioni locali $\varphi : \Omega \to U_p$ e $\psi : \Omega \to U_q$ con gli stessi coefficienti della I forma.*

Dimostrazione: $\Leftarrow$) Conseguenza immediata del lemma;
$\Rightarrow$) Dato p esiste un $U_p \ni p$ e $U_q \ni q$ e $f : U_p \to U_q$ isometria. A meno di restringere U_p (e di restringere di conseguenza U_q) ho anche una parametrizzazione locale $\varphi : \Omega \to U_p$. Pongo allora $\psi : \Omega \to U_q$ come $\psi = f \circ \varphi$ e si ha la tesi.

Definizione 3.14 *Sia S una superficie; una grandezza relativa a S si dice* ***intrinseca*** *se è invariante per isometria, cioè se data una isometria tra S e S' le due grandezze sono le stesse.*

ESEMPIO: Le curvature principali sono invarianti per congruenza ma non sono grandezze intrinseche (il piano è localmente isometrico al cilindro ma le curvature principali sono per uno $0, 0$ e per l'altro $1, 0$). La distanza intrinseca è invece una grandezza intrinseca.

Definizione 3.15 *Una grandezza che dipende dalle scelte di coordinate si dice* ***intrinseca*** *se è funzione soltanto di E, F, G e loro derivate*

OSSERVAZIONE: **(1)**i coefficienti e, f, g non sono intrenseci (basta pensare al piano e al cilindro, che hanno parametrizzazioni con gli stessi E, F, G)
(2) Una grandezza indipendente da coordinate è intrinseca se e solo se la sua espressione in coordinate lo è;

Esercizio 3.0.2 *Il piano $P = \{z = 0\}$ e il cono $Z = \{x^2 + y^2 = z^2, z > 0\}$ sono localmente isometrici.*

Soluzione: Le congruenze di P agiscono transitivamente su P (bastano le traslazioni); in Z le rotazioni intorno all'asse z danno congruenze che agiscono transitivamente sulle circonferenze del tipo $Z \cap \{z = z_0\}$. Basta dunque mostrare che ogni punto della forma $(z_0, 0, z_0)$ in Z ha un intorno isometrico a un punto del piano; Consideriamo adesso $\varphi : \Omega \to P$ e $\psi : \Omega \to Z$ con $\Omega = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \times (0, +\infty) \subseteq \mathbb{R}^2$ tali che

$$\varphi(u, v) = (v \cos u, v \sin u, 0)$$

$$\psi(u, v) = (\frac{v}{\sqrt{2}} \cos(\sqrt{2}u), \frac{v}{\sqrt{2}} \sin(\sqrt{2}u), \frac{v}{\sqrt{2}})$$

Queste sono mappe tra due varietà; se mostro che $d\varphi$ e $d\psi$ sono invertibili, allora si restringono a due parametrizzazioni locali. Basta vedere che definiscono coefficienti della I forma tali che $EG - F^2 \neq 0$. Abbiamo:

$$\varphi_u = \begin{pmatrix} -v \sin u \\ v \cos u \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \varphi_v = \begin{pmatrix} \cos u \\ \sin u \\ 0 \end{pmatrix} \qquad I_\varphi = \begin{pmatrix} v^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\psi_u = \begin{pmatrix} -v \sin(\sqrt{2}u) \\ v \cos(\sqrt{2}u) \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \varphi_v = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \cos(\sqrt{2}u) \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \sin(\sqrt{2}u) \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \qquad I_\psi = \begin{pmatrix} v^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dunque sono invertibili e dato che hanno gli stessi coefficienti della I forma fondamentale $\psi \circ \varphi^{-1}$ è isometria

Definizione 3.16 *Sia $X : \Omega \to U$ una parametrizzazione locale. Allora si definiscono* ***simboli di Christoffel*** *gli elementi $\Gamma_{ij}^k : \Omega \to \mathbb{R}$ tali che:*

1. $X_{uu} = eN + \Gamma_{11}^1 X_u + \Gamma_{11}^2 X_v$;
2. $X_{uv} = fN + \Gamma_{12}^1 X_u + \Gamma_{12}^2 X_v$
3. $X_{vv} = gN + \Gamma_{22}^1 X_u + \Gamma_{22}^2 X_v$

Proposizione 3.0.13 *I simboli di Christoffel sono intrinseci*

Dimostrazione: Impostiamo il prodotto scalare $< X_{uu}, X_u > = < eN, X_u > + \Gamma^1_{11} < X_u, X_u > + \Gamma^2_{11} < X_u, X_v > \Longleftrightarrow \frac{1}{2}E_u = \frac{\partial < X_u, X_u >}{\partial u} = \Gamma^1_{11}E + \Gamma^2_{11}F$. Impostando adesso il prodotto scalare $< X_{uu}, X_v > = \Gamma^1_{11}F + \Gamma^2_{11}G$ e osserviamo che $< X_{uu}, X_v > = \frac{\partial < X_u, X_v >}{\partial u} - < u, X_{uv} > = F_u - \frac{1}{2}\frac{\partial < X_u, X_u >}{\partial v} = F_u - \frac{1}{2}E_v$. Otteniamo dunque il seguente sistema lineare

$$\begin{cases} E\Gamma^1_{11} + F\Gamma^2_{11} = \frac{1}{2}E_u \\ F\Gamma^1_{11} + G\Gamma^2_{11} = F_u - \frac{1}{2}E_u \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \Gamma^1_{11} \\ \Gamma^2_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}E_u \\ F_u - \frac{1}{2}E_u \end{pmatrix}$$

Poiché la matrice è invertibile, allora i simboli di Crhistoffel $\Gamma^1_{11}, \Gamma^2_{11}$ sono funzioni di E, F, G, F_u, E_u e pertanto sono intrinseci. Per gli altri si procede in modo analogo

Teorema 3.0.14 (Egregium di Gauss) *La curvatura Gaussiana è intrinseca, cioè se $f : S \to S'$ è una (locale) isometria, allora $k(p) = k(f(p))$ per ogni $p \in S$.*

Dimostrazione: Basta mostrare che la sua espressione in coordinate è intrinseca. Sia A la matrice che rappresenta dN in coordinate, cioè $N_u = dN(X_u) = a_{11}X_u + a_{21}X_v$ e $N_v = dN(X_v) = a_{12}X_u + a_{21}X_v$. L'idea è di guardare la componente lungo X_v dell'uguaglianza $(X_{uu})_v = (X_{uv})_u$ decomposto in X_u, X_v, N;
$(X_uu)_v$ =roba in $span(N)$+ roba in $span(X_u)$ $+ eN_v + \Gamma^1_{11}X_{uv} + (\Gamma^2_{11})_v X_v + \Gamma^2_{11}X_{vv} = c + ea_{22}X_v + \Gamma^1_{11}\Gamma^2_{12}X_v + (\Gamma^2_{11})_v$
$(X_{uv})_u = c' + fN_u + \Gamma^2_{11}X_v + \Gamma^1_{12}X_{uu} + (\Gamma^2_{12})_v + \Gamma^2_{12}X_{vv} = c' + fa_{21} + X_v$(funzioni di Γ^k_{ij} e loro derivate). Allora dalla prima uguaglianza scritta si ha che: ea_22+(funzioni dei Γ^k_{ij})= fa_{21}+(funzioni dei Γ^k_{ij}); dunque $ea_{22} - fa_{21}$ è una grandezza intrinseca. Ma adesso

$$A = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} = \frac{1}{EG - F^2}\begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} = \frac{1}{EG - F^2}\begin{pmatrix} \times & \times \\ -eF + fE & -fF + gE \end{pmatrix}$$

A questo punto deve valere che $ea_{22} - fa_{21} = -\frac{1}{EG - F^2} = -(\frac{Eeg - f^2E}{EG - f^2})$ che è la tesi perché???

Corollario 3.0.15 *S^2 non è localmente isometrica al piano.*

Dimostrazione: La curvatura di Gauss del piano è costantemente 0, mentre quella del piano è costantemente 1. Dunque non è possibile fare una carta piana che mantiene le distanze della sfera (si dovrebbe altrimenti conservare la curvatura di Gauss

Proposizione 3.0.16 *Elicoide E e catenoide C sono localmente isometrici.*

In effetti esiste una locale isometria $f : E \to C$. Ricordiamo che

$$E = \varphi(\mathbb{R}^2) \quad \varphi(u, v) = (v\cos u, v\sin u, u) \quad Diffeomorfismo$$

$$C = \psi(\mathbb{R}^2) \quad \psi(u, v) = \cosh u\cos v, \cosh u\sin v, u) \quad \textit{Rivestimento}$$

e le loro relative curvature gaussiane valevano $k_E(\varphi(u, v)) = -\frac{1}{(1+v^2)^2}$ e $k_C(\psi(u, v)) = -\frac{1}{(\cosh u)^4}$. Sappiamo che f deve conservare la curvatura k per il teorema egregium di Gauss e dunque, data una ipotetica f tale che $f(\varphi(u, v)) = \psi(u', v')$, allora $-\frac{1}{(1+v^2)^2} = -\frac{1}{(\cosh u')^2}$ da cui $1+v^2 = \cosh^2 u'$. Questa osservazione ci suggerisce di cambiare parametrizzazione locale dell'elicoide (se pongo $v = \sinh u'$ ho l'uguaglianza) e pertanto scelgo di scrivere l'elicoide con questa nuova parametrizzazione (inverto anche u e v per avere maggior simmetria): $\alpha(u, v) = (\sinh u\cos v, \sinh u\sin v, v)$. Questa nuova parametrizzazione è valida poiché $u \mapsto \sinh u$ è un diffeomorfismo. Sicuramente adesso

$K_E(\alpha(u,v)) = K_C(\psi(u,v))$ e dunque la mappa $f = \psi \circ \alpha^{-1}$ preserva la curvatura di Gauss; verifichiamo che sia una isometria confrontando i coefficienti della I forma fondamentale:

$$\alpha_u = \begin{pmatrix} \cosh u \cos v \\ \cosh u \sin v \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \alpha_v = \begin{pmatrix} -\sinh u \sin v \\ \sinh u \cos v \\ 1 \end{pmatrix} \qquad I_\varphi = \begin{pmatrix} \cosh^2 u & 0 \\ 0 & \cosh^2 u \end{pmatrix}$$

e confrontandoli con quelli di ψ (già calcolati in precedenza) si ha la locale isometria. Dato che la mappa f è anche suriettiva si che le due superfici sono localmente isometriche.

Definizione 3.17 *X si dice **parametrizzazione ortogonale** se per ogni punto $X_u \perp X_v$ o equivalentemente F è costantemente nullo*

Proposizione 3.0.17 *Se X è una parametrizzazione ortogonale, allora la curvatura di Gauss $k = -\frac{1}{2\sqrt{EG}}((\frac{E_v}{\sqrt{EG}})_v + (\frac{G_u}{\sqrt{EG}})_u)$*

Dimostrazione: Discende dalla dimostrazione del teorema egregium, esplicitando i Γ_{ij}^k in funzione di E, G e di loro derivate

Definizione 3.18 *Sia $\gamma : I \to S$ una curva con S superficie; si chiamano **campi tangenti longo** γ gli elementi dello spazio (vettoriale) $\tau(\gamma) = \{f : I \to \mathbb{R}^3, f(t) \in T_{\gamma(t)}(S), \forall t \in I, f\ C^\infty\}$. Osserviamo che le f sono definite sull'intervallo (e non sul supporto): se una curva non è iniettiva, per i tempi diversi in cui passa nello stesso punto ho due valori distinti di f.*

Definizione 3.19 *La **derivata covariante** è l'operatore lineare $\frac{D}{dt} : \tau(\gamma) \to \tau(\gamma)$ tale che $V \mapsto \frac{DV}{dt} : t \mapsto \pi_t(V'(t))$ dove $\pi_t : \mathbb{R}^3 \to T_{\gamma(t)}(S)$ è la proiezione ortogonale.*

Osservazione: é una buona definizione in quanto è lineare poiché è composizione di applicazioni lineari. Inoltre è una funzione C^∞

Definizione 3.20 *$V \in \tau(\gamma)$ si dice **parallelo** se $\frac{DV}{dt} = 0$, cioè se $V'(t) = \lambda(t)N(t)$ per qualche $\lambda : I \to \mathbb{R}$.*

Osservazione: I campi paralleli sono uno spazio vettoriale in quanto sono il Ker di π_t

Proposizione 3.0.18 *Siano $V, W \in \tau(\gamma)$, allora $\frac{d}{dt} < V, W >=< \frac{DV}{dt}, W > + < V, \frac{DW}{dt} >$*

Dimostrazione: $\frac{d}{dt} < V, W >=< V', W > + < V, W' >=< \frac{DV}{dt} + \lambda N, W > + < V, \frac{DV}{dt} + \alpha N, V >=< \frac{DV}{dt}, W > + < V, \frac{DW}{dt} >$ in quanto $V' = \frac{DV}{dt} + \lambda N$ (spezzo in componenti: quella sul piano tangente, e quella ortogonale) e $N \perp V$ e $N \perp W$ perché sono campi tangenti.

Supponiamo adesso $\gamma(I)$ contenuto in una carta con parametrizzazione locale $X : \Omega \to U$: $\gamma(t) = X(u(t), v(t))$ e scriviamo il generico $V \in \tau(\gamma)$: $V(t) = \alpha(t)X_u(\gamma(t)) + \beta(t)X_v(\gamma(t))$. Si osserva facilmente che α e β sono funzioni C^∞; proviamo adesso a scrivere la derivata covariante nelle coordinate X_u, X_v:

$$V'(t) = \alpha' X_u + \alpha(u' X_{uu} + v' X_{uv}) + \beta' X_v + \beta(u' X_{uv} + v' X_{vv}) =$$

$$= \alpha' X_u + \alpha u'(\Gamma_{11}^1 X_u + \Gamma_{11}^2 X_v) + \alpha v'(\Gamma_{12}^1 X_u + \Gamma_{12}^2 X_v) + \beta' X_v + \beta u'(\Gamma_{12}^1 X_u + \Gamma_{12}^2 X_v) + \beta v'(\Gamma_{22}^1 X_u + \Gamma_{22}^2 X_v) + \delta N$$

Dove δ è una funzione che viene dagli sviluppi dei simboli di Christoffel. Perciò togliendo il termine in N si ha:

$$\frac{DV}{dt} = X_u(\alpha' + \alpha u'\Gamma_{11}^1 + \alpha v'\Gamma_{12}^1 + \beta u'\Gamma_{12}^1 + \beta v'\Gamma_{22}^1) + X_v(\beta' + \alpha u'\Gamma_{11}^2 + \alpha v'\Gamma_{12}^2 + \beta u'\Gamma_{12}^2 + \beta v'\Gamma_{22}^2)$$

Corollario 3.0.19 *La derivata covariante è intrinseca, cioè se f è isometria locale, $\gamma : I \to S$, $V \in \tau(\gamma)$, allora posto $W \in \tau(f \circ \gamma)$, $W(t) = df_{\gamma(t)}(V(t))$ vale che $\forall t \in I$, $\frac{DW}{dt}(t) = df_{\gamma(t)}(\frac{DV}{dt}(t))$*

Dimostrazione: Discende dal fatto che i simboli di Christoffel sono intrinseci (è molto più difficile da scrivere che da capire: in soldoni se derivo e faccio isometria è come fare isometria e poi derivare)

Osservazione: dalla definizione di campo parallelo si ha che

$$V \text{ parallelo} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha' = -(\alpha u'\Gamma^1_{11} + \alpha v'\Gamma^1_{12} + \beta u'\Gamma^1_{12} + \beta v'\Gamma^1_{22}) \\ \beta' = -(\alpha u'\Gamma^2_{11} + \alpha v'\Gamma^2_{12} + \beta u'\Gamma^2_{12} + \beta v'\Gamma^2_{22}) \end{cases}$$

cioè poniamo uguale a 0 i coefficienti di X_u e X_v. Osserviamo che nel conto fatto *gamma* (e dunque u', v') e i simboli di Christoffel sono fissati e dunque le uniche incognite da trovare sono α e β. In sostanza questo è un sistema differenziale lineare in forma normale.

Proposizione 3.0.20 *Per ogni $v_0 \in T_{\gamma(t_0)}(S)$ esiste unico campo parallelo $V \in \tau(\gamma)$ con $V(t_0) = v_0$. Tale campo tangente prende il nome di **trasporto parallelo** di v_0*

Dimostrazione: Discende direttamente dal teorema di esistenza e unicità di Cauchy per equazioni differenziali applicato al sistema differenziale scritto.

Se fisso un altro $t_1 \in I$ ho una mappa $\psi : T_{\gamma(t_0)}(S) \to T_{\gamma(t_1)}(S)$ tale che prende $v_0 \mapsto V(t_1)$ con V trasporto parallelo; questa mappa è una isometria lineare in quanto se V, W sono paralleli, allora $\frac{D}{dt} < V, W >= 0$ per cui $< \psi(v_0), \psi(v_1) >=< v_0, v_1 >$ per ogni $v_0, v_1 \in T_{\gamma(t_0)}(S)$ poiché $< V, W >$ è costante. In particolare V parallelo implica $\|V\|$ costante.

Esempi: **(1)**Sia $S = \{z = 0\}$ il piano, allora $T_p(S) = S$ per ogni $p \in S$ e se V è un campo tangente, allora $V : I \to \{z = 0\}$; dunque $\frac{DV}{dt} = V'$ e quindi V è parallelo se e solo se $V' = 0$ se e solo se V è costante.
(2) Consideriamo la sfera S^2 e γ un parallelo di S^2 PLA. Dunque $V = \gamma' \Rightarrow V$ è parallelo se e solo se γ è l'equatore: infatti V è parallelo se e solo se $V' = \gamma''$ ha solo componente normale e questo avviene solamente all'equatore.

Definizione 3.21 *Una curva $\gamma : I \to S$ è una **geodetica** se $\frac{D\gamma'}{dt} = 0$, cioè se γ' è parallelo.*

Osservazione: sono le curve la cui accelerazione è solo normale alla superficie ovvero *gamma* è geodetica se e solo se $\gamma''(t) \perp T_{\gamma(t)}(S)$ per ogni $t \in I$. Osserviamo inoltre che γ geodetica $\Rightarrow \|\gamma'\|$ costante

Teorema 3.0.21 *Per ogni $p \in S$ e $v \in T_p(S)$ esiste unica geodetica $\gamma : I \to S$ con $\gamma(0) = p$ e $\gamma'(0) = v$ (può accadere che $I \neq \mathbb{R}$)*

Dimostrazione: In coordinate si ha che $\gamma' = u'X_u + v'X_v$, cioè nelle equazioni di prima $\alpha = u'$ e $\beta = v'$. Se consideriamo adesso il sistema di equazioni differenziali calcolato:

$$\begin{cases} \alpha' = -(\alpha u'\Gamma^1_{11} + \alpha v'\Gamma^1_{12} + \beta u'\Gamma^1_{12} + \beta v'\Gamma^1_{22}) \\ \beta' = -(\alpha u'\Gamma^2_{11} + \alpha v'\Gamma^2_{12} + \beta u'\Gamma^2_{12} + \beta v'\Gamma^2_{22}) \end{cases}$$

questo diventa:

$$\begin{cases} u'' = -((u')^2\Gamma^1_{11} + 2u'v'\Gamma^1_{12} + (v')^2\Gamma^1_{22}) \\ v'' = -((u')^2\Gamma^2_{11} + 2u'v'\Gamma^2_{12} + (v')^2\Gamma^2_{22}) \end{cases}$$

che è un sistema in forma normale del secondo ordine e dunque ammette soluzione e questa è unica per il teorema di esistenza e unicità di Cauchy. L'intervallo potrebbe non essere tutto $\mathbb{R}$ perché non ho un sistema lineare. Le ultime equazioni scritte prendono il nome di **equazioni delle geodetiche**.

Proposizione 3.0.22 *Le geodetiche sono intrinseche, cioè se $\gamma : I \to S$ è geodetica e $f : S \to S'$ è una locale isometria, allora $f \circ \gamma$ è una geodetica*

Dimostrazione: Dato che *gamma* è geodetica, allora $\frac{D\gamma'}{dt} = 0$; adesso, poiché la derivata covariante è intrinseca, $\frac{D(f\circ\gamma)'}{dt} = \frac{Dsf(\gamma')}{dt} = df(\frac{D\gamma'}{dt}) = 0$

ESEMPI: **(1)** Sia $S = \{z = 0\}$ il piano. Allora per ogni curva γ, $\frac{D\gamma'}{dt} = \gamma''$. Dunque γ è geodetica $\Leftrightarrow \gamma'' = 0 \Leftrightarrow \gamma(t) = p + tv$; cioè le geodetiche sul piano sono tutte e solo le rette che passano per un punto fissato p con velocità iniziale fissata v.
(2) Sia $C = \{x^2+y^2 = 1\}$ il cilindro. Sia $f : \{z = 0\} \to C$ la locale isometria data da $f(x, y, 0) = (\cos x, \sin x, y)$ (abbiamo già mostrato che è locale isometria). Allora per ogni geodetica γ di $\{z = 0\}$, anche $f \circ \gamma$ è una geodetica per la proposizione precedente. Dunque per ogni $(p_0, p_1, 0)$, $(v_0, v_1, 0)$ la geodetica $f\circ\gamma : \mathbb{R} \to C$ è data da $t \mapsto f(p_0+tv_0, p1+tv_1, 0) = (\cos(p_0+tv_0), \sin(p_0+tv_0), p_1 + tv_1)$. Queste geodetiche sono tutte eliche circolari rette e dunque tutte le eliche circolari rette (anche quelle degeneri cioè circonferenze, rette o costanti) sono contenute nelle geodetiche del cilindro. Queste però sono tutte le geodetiche del cilindro in quanto realizzano tutte le possibili condizioni iniziali che si possono avere (cioè fissato $p \in C$ e una velocità v trovo una elica circolare retta che ci passa tutta contenuta in C)

Proposizione 3.0.23 *Sulla sfera S^2, tutte e sole le geodetiche sono (le costanti) e le parametrizzazioni a velocità costante dei cerchi massimi, cioè di $S^2 \cap P$ al variare di P tra i piani per l'origine*

Dimostrazione: Basta mostrare che queste sono geodetiche in quanto verificano tutte le condizioni iniziali possibili. Se γ è un argo di cerchio massimo PLA, allora la curvatura normale è $|k_n(\gamma)| = 1$ (vero per ogni curva PLA in S^2 in quanto $dN = \pm id$), ma vale anche che la curvatura totale $k(\gamma) = 1$ perché sono in arco di cerchio massimo. Dunque $|k_n(\gamma)| = |k(\gamma)|$ ovvero $| < \gamma'', N\circ\gamma > | = |\gamma''|$ e per la disuguaglianza di Cauchy-Scwartz, poiché $\|N\| = 1$, allora $\gamma'' = N \circ \gamma$ e dunque l'accelerazione di γ è tutta normale (cioè γ è geodetica)

Esercizio 3.0.3 *Provare a pensare al cono come locale isometrico al piano e trovare le geodetiche come si è fatto per il cilindro*

Enunciamo adesso due teoremi classici senza dimostrazione che saranno però utili in seguito:

Teorema 3.0.24 $\gamma : I \to S$ *è geodetica* $\Leftrightarrow \|\gamma'\| =$*costante e per ogni* $t_0 \in I$ *esiste* $\varepsilon > 0$ *tale che per ogni* $t, t' \in (t_0 -\varepsilon, t_0 +\varepsilon)$ *si ha* $d(\gamma(t), \gamma(t')) = L(\gamma_{|[t,t']})$, *cioè γ è **localmente minimizzante** (è la curva che verifica la distanza intrinseca in modo locale.*

Teorema 3.0.25 (Hopf-Rinow) *Se $S \subseteq \mathbb{R}^3$ è chiusa, allora tutte le geodetiche sono definite su tutto $\mathbb{R}$ (in generale questa cosa è falsa: sia $S = \mathbb{R}^2 - \{0\}$; la geodetica con $\gamma(0) = (1, 0)$ e $\gamma'(0) = (-1, 0)$ non è definita su tutto $\mathbb{R}$: si trova un buco dopo un po')*

Idea della dimostrazione: poiché le geodetiche hanno velocità di modulo costante, se γ è geodetica, allora $\gamma((-M, M))$ è contenuta in un limitato di S e dunque, poiché S è chiusa, in un compatto di S. La tesi segue dal teorema della fuga dai compatti (continuazione delle soluzioni: mi metto in $\gamma(M)$ e faccio qualcosa)

OSSERVAZIONE: Se γ è geodetica e a, b sono costanti, anche $\alpha : t \mapsto \gamma(a + bt)$ è geodetica: infatti $\alpha'(t) = b\gamma'(a + bt)$ e $\alpha''(t) = b^2\gamma''(a + bt) = \lambda(t)N(\gamma(a + bt)) = \lambda(t)N(\alpha(t))$ cioè l'accelerazione è tutta normale.

Geodetiche su superfici di rotazione: Sia $x : I\times\mathbb{R} \to S$ tale che $x(u, v) = (\varphi(u) \cos v, \varphi(u) \sin v, \psi(u))$ con $\varphi(u) > 0$ e $(\varphi')^2+(\psi')^2 = 1$ (cioè la direttrice $\alpha = (\varphi(t), \psi(t), 0)$ è PLA; ricordiamo per i conti di dopo che se deriviamo l'equazione della velocità si ottiene $\varphi'\varphi'' + \psi'\psi'' = 0$). Se $\gamma : J \to S$ è una curva, allora $\gamma(t) = x(u(t), v(t))$ (localmente ovvio, globalmente dalla teoria dei rivestimenti: x è un rivestimento e dunque ogni curva di solleva) Ho dunque fissato γ, u, v sono funzioni di t. Calcoliamo le varie derivate:

$$x_u = \begin{pmatrix} \varphi' \cos v \\ \varphi' \sin v \\ \psi' \end{pmatrix} \quad x_v = \begin{pmatrix} -\varphi \sin v \\ \varphi \cos v \\ 0 \end{pmatrix} \quad x_{uu} = \begin{pmatrix} \varphi'' \cos v \\ \varphi'' \sin v \\ \psi'' \end{pmatrix} \quad x_{uv} = \begin{pmatrix} -\varphi' \sin v \\ \varphi' \cos v \\ 0 \end{pmatrix} \quad x_{vv} = \begin{pmatrix} -\varphi \cos v \\ -\varphi \sin v \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\gamma = x \circ (u, v) \quad \gamma' = u'x_u + v'x_v \quad \gamma'' = u''x_u + u'(u'x_{uu} + v'x_{uv}) + v''x_v + v'(u'x_{uv} + v'x_{vv})$$
$$\gamma'' = u''x_u + v''x_v + (u')^2 x_{uu} + (v')^2 x_{uv} + 2u'v'x_{uv}$$

Dire γ è geodetica è equivalente a dire che le proiezioni su x_u e x_v dell'accelerazione sono 0 ovvero che $< \gamma'', x_u >=< \gamma'', x_v >= 0$. Imponiamo dunque tali condizioni:

$$< \gamma'', x_u >= u'' < x_u, x_u > +v'' < x_u, x_v > +(u')^2 < x_{uu}, x_u > +2u'v' < x_{uv,u} > +(v')^2 < x_{vv,x_u} >=$$
$$= u'' + 0 + (u')^2(\varphi'\varphi'' + \psi'\psi'') - (v')^2\varphi\varphi' = u'' - (v')^2\varphi\varphi' = 0$$

e anche (con conti analoghi al primo)

$$< \gamma'', x_v >= \varphi^2 v'' + 2u'v'\varphi\varphi' = 0 \Leftrightarrow 0 = \varphi v'' + 2u'v'\varphi'$$

Ho quindi ottenuto le equazioni generali delle geodetiche per una superficie di rotazione:

$$\begin{cases} u'' = (v')^2\varphi\varphi' \\ v'' = -\frac{2u'v'\varphi'}{\varphi} \end{cases}$$

Adesso ci chiediamo chi sono gli u, v che verificano questa equazione: abbiamo la seguente

Proposizione 3.0.26 *I meridiani, percorsi a velocità costante, sono geodetiche. Un parallelo $t \mapsto x(t_0, t)$ è una geodetica $\Leftrightarrow \varphi(t_0) = 0$, ovvero la distanza dall'asse z è critica (è massima o minima) disegnino per far vedere quali sono i paralleli giusti*

Dimostrazione: Verifichiamo che i meridiani e i paralleli dati verificano le equazioni delle geodetiche scritte sopra; per un meridiano vale che $v' = 0$ e $v'' = 0$ da cui la seconda equazione risulta essere vera e la prima diventa $u'' = 0$ cioè $u = a + tb$ e dunque se la velocità è costante si ha una geodetica. Consideriamo adesso il parallelo $t \mapsto x(t_0, t)$: questo ha $u' = 0, u'' = 0$ e $v' = 1, v'' = 0$ da cui la seconda equazione delle geodetiche è automaticamente soddisfatta: la prima risulta $0 = \varphi(t_0)\varphi'(t_0)$ che è verificata se e solo se $\varphi'(t_0) = 0$ perchè siamo nelle ipotesi che $\varphi > 0$

Teorema 3.0.27 *Sia $\gamma : I \to S$ con S superficie di rotazione e γ geodetica; siano R, α coordinate cilindriche su $\mathbb{R}^3$ (con R distanza dall'asse z) e sia $\theta(t)$ l'angolo tra $\gamma'(t)$ e il parallelo passante per $\gamma(t)$. Alloa sono **integrali primi del moto** (cioè costanti) le funzioni:*

$$\Big\{ R^2\alpha' = R^2(\gamma(t))v'(t) \quad \text{Conservazione del momento angolare} R\cos\theta = R(\gamma(t))\cos\theta(t) \quad \text{Teorema di Clairant}$$

Dimostrazione: Se $\gamma = x \circ (u, v)$, allora $R(\gamma(t)) = \varphi(u(t))$. Dunque $R^2\alpha = (\varphi \circ u)^2 v'$. Per verificare che è un integrale primo, verifico che la sua derivata sia nulla: $((\varphi \circ u)^2 v')' = (2\varphi\varphi'u')v' + \varphi^2 v''$ che è proprio la seconda equazione delle geodetiche e dunque vale esattamente 0. Mostriamo anche che la seconda quantità è costante:

$$\cos\theta(t) = \frac{< \gamma', x_v >}{\|\gamma'\|\|x_v\|} = \frac{< u'x_u + v'x_v, x_v >}{\|\gamma'\|\|x_v\|} = \frac{v'\|x_v\|^2}{\|\gamma'\|\|x_v\|} = \frac{v'\varphi}{\|\gamma'\|}$$

e dunque vale che:

$$R\cos\theta = \varphi\cos\theta = \frac{v'\varphi^2}{\|\gamma'\|} = \frac{R^2\alpha'}{\|\gamma'\|}$$

che è costante perché numeratore e denominatore costante (numeratore per prima relazione, denominatore perché la velocità di una geodetica è costante).

Esercizio 3.0.4 *Sia $S = \{x^2 + y^- z^2 = 1\}$ l'iperboloide (è superficie perché preimmagine di un valore regolare). Questa superficie è ottenuta ruotando la curva $\gamma(t) = (\sqrt{1+t^2}, 0, t)$ (che non è parametrizzata per lunghezza d'arco, ma i conti fatti sulle superfici di rotazione sono comunque validi). Trovare i paralleli che sono geodetiche e delle condizioni sufficienti per le geodetiche che partono dal punto $p = (\sqrt{2}, 0, 1)$ con velocità $\|v\| = 1$ affinché intersechino il piano $\{z = 0\}$.*

Soluzione: Per quanto mostrato per le superfici di rotazione, un parallelo è geodetica se e solo se $\varphi'(t_0) = 0 \Leftrightarrow \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} = 0 \Leftrightarrow t = 0 \Leftrightarrow$ è il parallelo che che passa per $(0, 0, 0)$.
Chiamiamo adesso θ l'angolo tra il parallelo passante per p e la velocità iniziale v. Vogliamo capire per quali *theta* la geodetica interseca il piano $\{z = 0\}$. Osserviamo prima di tutto che per il teorema di Hopf-Rinow la geodetica è definita su tutto $\mathbb{R}$ e che per ragioni di simmetria (disegnino) posso ridurmi a studiare $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$. Studiamo preliminarmente i casi limite: Se $\theta = \frac{\pi}{2}$ ho un meridiano e dunque una geodetica che interseca il piano; se $\theta = 0$ (cioè v è orizzontale, v è nel parallelo), allora $R(t)\cos\theta(t) = R(0)\cos\theta_0 = R(0) \to R(t) = \frac{R(0)}{\cos\theta(t)} \geq R(0)$; dunque la distanza dal dentro cresce al variare di t e pertanto $\gamma_v(\mathbb{R})$ giace fuori da $\{-1 < z < 1\}$ e per continuità giace tutta in $S \cap z \geq 1$. Vediamo adesso il caso generale: supponiamo che $\exists t_0$ tale che $\gamma_v(t_0) \subseteq \{z = 0\}$; allora per Clairant $R(0)\cos\theta_0 = R(t_0)\cos\theta(t_0)$ e questo vuol dire che $\sqrt{2}\cos\theta_0 = 1\cos\theta(t_0)$ da cui $\cos\theta_0 = \frac{\cos\theta(t_0)}{\sqrt{2}} \leq \frac{1}{\sqrt{2}} = \cos\frac{\pi}{4}$ e dunque la disuguaglianza è verificata se $\frac{\pi}{4} \leq \theta_0 \leq \frac{\pi}{2}$. Questa condizione è solamente necessaria: abbiamo fatto vedere che se θ_0 non sta in quell'intervallo, allora sicuramente non intersecherà il piano. Dimostriamo adesso che se $\theta_0 > \frac{\pi}{4}$ allora c'è intersezione; se $\theta_0 = \frac{\pi}{4}$ allora la geodetica tende al piano spiraleggiando senza mai toccarlo. Sia dunque $\theta_0 = \frac{\pi}{4} + \varepsilon$ con $\varepsilon > 0$, allora sempre per Clairant $\cos\theta(t) = \frac{\sqrt{2}\cos\theta_0}{R(t)} \leq \frac{1-\varepsilon'}{R(t)} \leq 1 - \varepsilon'$ (stimando il coseno e anche il raggio). Questo vuol dire che $\theta(t) \geq \varepsilon''$ per qualche ε''. Prendiamo adesso una base ortonormale di $T_{\gamma(t)}(S)$ data da $x_u, \frac{x_v}{R}$ (supponendo la direttrice PLA) dove $\frac{x_v}{R}$ è la direzione del parallelo. Abbiamo appena mostrato che se $\theta_0 > \frac{\pi}{4}$, $\gamma'(t) = \alpha(t)x_u + \beta(t)\frac{x_v}{R}$ con $\beta(t) = \cos\theta(t) \leq 1 - \varepsilon'$; da cui, visto che $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ perché la curva è PLA, si ha $|\alpha| > \delta$. Da ciò si deduce che la coordinata di γ_v' lungo i meridiani è sempre $> \delta$ o minore di δ, cioè la geodetica sale sempre o scende sempre. Poiché adesso δ è uniforme (non dipende dal tempo) allora la derivata di $z \circ \gamma$ (cioè la componente verticale della velocità della curva) è sempre $> \delta'$ o $< -\delta'$ e dunque $z \circ \gamma$ passa sempre per $\{z = 0\}$.
Vediamo adesso il caso limite: se $\theta_0 = \frac{\pi}{4}$, allora $\cos\theta(t) = \frac{\sqrt{2}\cos\theta_0}{R(t)} = \frac{1}{R(t)}$: non ho la stima uniforme di prima, cioè non posso fissare un $\varepsilon > 0$ uniforme. Vediamo cosa succede: se $\exists t_0$ tale che $\gamma(t_0) \subseteq \{z = 0\}$, allora $\cos\theta(t_0) = 1$ e dunque $\gamma'(t_0)$ sarebbe orizzontale; ma il parallelo $\{z = 0\}$ è il supporto di una geodetica, dunque γ_v dovrebbe coincidere (per unicità del problema di Cauchy) con il parallelo, il che è assurdo perché γ_v non giace interamente sul piano. Spiraleggia perché per ogni $z = \varepsilon > 0$, la curva riesce a superare il parallelo $z = \varepsilon$ (continuo a girare e continuo a scendere e dunque spiraleggio).

Esercizio 3.0.5 *Usare Clairant per dare una descrizione qualitativa delle geodetiche del cono*

Definizione 3.22 *Sia S superficie, un* **campo vettoriale** *su S è una funzione $X : S \to \mathbb{R}^?$ tale che a ogni punto della superficie associa un vettore. Lo spazio vettoriale dei campi vettoriali su S si indica con $\mathcal{T}(S)$.*

Definizione 3.23 *Sia $X \in \mathcal{T}(S)$ un campo vettoriale su S; una curva γ è detta* ***linea integrale*** *per X se $\gamma'(t) = X(\gamma(t))$ per ogni t nel dominio di γ.*

Definizione 3.24 (Teorema) *Sia $X \in \mathcal{T}(S)$ un campo vettoriale; allora esiste un intorno aperto U di $S \times \{0\}$ in $S \times \mathbb{R}$ e una funzione $F : U \to S$ tale che F sia C^∞ e per ogni $p \in S$, la funzione $\gamma_p : (-a_p, b_p) \to S$ con $a_p, b_p > 0$ tale che $\gamma_p(t) = F(p,t)$ e $\gamma_p(0) = p$ sia una linea integrale di X, dove $\{p\} \times (-a_p, b_p) \subseteq S \times \mathbb{R}$ è uguale a $U \cap (\{p\} \times \mathbb{R})$. La F che verifica il teorema è detta* ***flusso di un campo vettoriale***

Idea di dimostrazione (pensava che già si conoscesse): Si scrive il problema per le linee integrali in coordinate: se $X = a(u,v)x_u + b(u,v)x_v$ e $\gamma = x \circ (u,v)$, allora $\gamma' = u'x_u + v'x_v$ e dunque la condizione per l'esistenza è

$$\begin{cases} u' = a(u,v) \\ v' = b(u,v) \end{cases}$$

che è un problema di Cauchy che si risolve e la soluzione è C^∞ perché tutte le dipendenze sono C^∞

Definizione 3.25 *Sia X un campo vettoriale, un* ***integrale primo*** *per X è una funzione $f : S \to \mathbb{R}$ tale che $df_p \neq 0$ per ogni $p \in S$ e f sia costante lungo le linee integrali di X o, equivalentemente, $df_p(X(p)) = 0$ per ogni $p \in S$ (se γ è una linea integrale, $(f \circ \gamma)'(t) = df(\gamma'(t)) = df_{\gamma(t)}(X(\gamma(t)))$) (sembrano gli insiemi invarianti di dinamici)*

Lemma 3.0.28 *Sia $p \in S$ punto sulla superficie, $X \in \mathcal{T}(S)$, $X(p) \neq 0$; allora esiste un intorno U di p in S tal che $X(q) \neq 0$ per ogni $q \in U$ e $f : U \to \mathbb{R}$ è integrale primo per $X_{|U}$. (disegnino e capire)*

Dimostrazione: Sia U tale che $X_{|U} \neq 0$; prendo $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to U$ a caso tale che $\alpha(0) = p$, $\alpha'(0)$ indipendente da $X(p)$. Infine, a meno di restringere U e ε, definisco $x : (-\varepsilon, \varepsilon) \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to S$ tale che $x(u,v) = \gamma_{\alpha(u)}(v) = F(\alpha(u), v)$. Voglio far vedere che x è una parametrizzazione locale:

$$x_u(0,0) = \frac{d}{du}(\gamma_{\alpha(u)})(0) = \alpha'(0) \quad x_v(0,0) = \frac{d}{dv}(\gamma_{\alpha(0)}(v))(0) = X(\alpha(0)) = X(p)$$

sono linearmente indipendenti $\Rightarrow$ a meno di restrizioni, x è una parametrizzazione locale. Pongo adesso $f = u \circ x^{-1} : U' \to \mathbb{R}$; $x : \Omega \to U'$ è diffeomorfismo. Allora f è costante sulle linee ortogonali per costruzione (oppure: $dx(x_v) = X$ e dunque $dx^{-1}(X) = x_v$ e $d_u(dx^{-1}(X)) = 0$) e inoltre $df = du \circ dx^{-1}$ non è mai nullo perché u è una coordinata e x è un diffeomorfismo. (NON CAPISCO).

Osservazione: Abbiamo anche mostrato che esiste una parametrizzazione locale con $x_v = X$ dove X è un campo non nullo assegnato

Teorema 3.0.29 (Esistenza di parametrizzazioni ortogonali) *Sia $p \in S$ superficie, allora esiste una parametrizzazione locale $x : \Omega \to U$ con $x_u \perp x_v$ in ogni punto.*

Dimostrazione: Tramite l'algoritmo di Gramm-Schimdt costruisco un frame ortonormale (w_1, w_2) su un certo U intorno di p in S (l'algoritmo fa perdere l'associazione alla parametrizzazione α da cui proveniva il frame). A meno di restringere U ho un integrale primo f per w_1 e un integrale g per w_2. Considero $\varphi : U \to \mathbb{R}^2$ tale che $\varphi(q) = (f(q), g(q))$. Osserviamo che $ker(d\varphi_p) = ker(df_p) \cap ker(dg_p) = span(w_1(p)) \cap span(w_2(p)) = \{0\}$. Vale che $span(w_1(p)) \subseteq ker(df_p)$ e per dimensionalità sono lo stesso spazio. Allora, a meno di restringere U, φ è diffeomorfismo tra U e Ω aperto di $\mathbb{R}^2$. Chiamiamo $x = \varphi^{-1} : \Omega \to U$; mostriamo che x è la parametrizzazione richiesta: per costruzione, poiché f è costante sulle linee integrali di w_1, φ porta linee integrali su linee verticali di Ω, cioè $d\varphi_q(w_1(q)) = \lambda(q)(0,1)$ con $\lambda(q) \neq 0$ (in alternativa $d\varphi_q(w_1(q)) = (df_q(w_1(q)), dg_q(w_2(q))) = (0,a)$ con $a \neq 0$). Allo stesso modo $d\varphi_q(w_2(q)) = (\mu(q), 0)$ con $\mu(q) \neq 0$. A questo punto ho finito perché $x_u = dx(e_1) = dx(\frac{d\varphi(w_2)}{\mu \circ x}) = \frac{d(x \circ \varphi)(w_2)}{\mu \circ x} = \frac{w_2}{\mu \circ x}$ e allo stesso modo $x_v = \frac{w_1}{\lambda \circ x}$ da cui la tesi poiché w_1 e w_2 sono vettori ortogonali.

OSSERVAZIONE: Abbiamo visto che esiste $x : \Omega \to U$ con $x_u = \alpha w_1$ e $x_v = \beta w_2$, dove w_1, w_2 sono vettori ortonormali assegnati. Non possiamo richiedere che $x_u = w_1$ e $x_v = w_2$ perché, se così fosse, avrei una parametrizzazione locale ortonormale, cioè $E, G = 1$ e $F = 0$ e dunque S sarebbe localmente isometrica al piano (e questo non è vero ogni volta che la curvatura di Gauss non è 0)

Sia adesso $v \in \tau(\gamma)$ un campo tangente lungo $\gamma : I \to S$ **unitario**, cioè $\|v(t)\| = 1$. Una base di $\mathbb{R}^3$ è data da $v(t), N(\gamma(t)), \bar{v}(t) = N(\gamma(t)) \wedge v(t)$. La base $\{v(t), \bar{v}(t), N(\gamma(t))\}$ è ortonormale positiva e dunque $v(t), \bar{v}(t)$ è una base positiva ortonormale di $T_{\gamma(t)}(S)$. Poiché $1 =< v(t), v(t) >\Rightarrow 0 = 2 < \frac{Dv}{dt}, v >$, ovvero $\frac{Dv}{dt} \in T_{\gamma(t)} \cap v^{\perp}$. Allora $\frac{Dv}{dt}$ è un multiplo di $\bar{v}(t)$

Definizione 3.26 *Il valore* $[\frac{Dv}{dt}] =< \frac{Dv}{dt}, \bar{v} >=< v', \bar{v} >$ *prende il nome di* ***valore algebrico della derivata covariante****. Vale la relazione* $\frac{Dv}{dt} = [\frac{Dv}{dt}]\bar{v}$

Definizione 3.27 *Sia* $\gamma : I \to S$ *una curva PLA, allora la* ***curvatura geodetica*** *di* γ *è* $k_g(t) = [\frac{D\gamma'}{dt}]$

OSSERVAZIONI: **(1)**$k_g = 0 \Leftrightarrow \frac{Dv}{dt} = 0 \Leftrightarrow \gamma$ è geodetica (cioè misura quanto γ si discosta dall'essere geodetica)
(2)$\gamma'' = \frac{D\gamma'}{dt} + k_n N(\gamma(t)) = k_g \bar{v} + k_n N(\gamma)$ da cui ricaviamo (dato che sono tutti unitari) l'uguaglianza $k^2 = \|\gamma''\|^2 = k_g^2 + k_n^2$

Definizione 3.28 *Siano* $v, w \in \tau(\gamma)$ *unitari, una* ***determinazione dell'angolo da*** v ***a*** w *è una funzione* $\varphi : I \to \mathbb{R}$ *tale che* $w(t) = v(t)\cos\varphi(t) + \bar{v}(t)\sin\varphi(t)$ *per ogni* t *(tiene conto di come si muove* w *rispetto a* v*)*

Lemma 3.0.30 *Una determinazione dell'angolo esiste e due diverse determinazioni differiscono per una costante* $2k\pi$ *con* $k \in \mathbb{Z}$.

Dimostrazione: La funzione $\alpha : I \to S^1$ data da $t \mapsto (< w, v >, < w, v' >) = (\cos, \sin)$ è C^∞ e dunque si solleva a una mappa $\varphi : I \to \mathbb{R}$ tale che $\pi \circ \varphi(t) = \alpha(t)$, dove $\pi : \mathbb{R} \to S^1$, $\pi(x) = (\cos x, \sin x)$ per la teoria dei rivestimenti. Due tali sollevamenti differiscono per una costante $2k\pi$ perché il sollevamento esiste ed è unico fissato un punto iniziale.

Lemma 3.0.31 *Siano* $v, w \in \tau(\gamma)$ *unitari,* φ *angolo da* v *a* w*, allora* $[\frac{Dw}{dt}] = [\frac{Dv}{dt}] + \varphi'$ *(*w *si muove seguendo* v *e seguendo l'angolo tra lui e* v

Dimostrazione: $w = v\cos\varphi + \bar{v}\sin\varphi$ e $w' = -v\varphi'\sin\varphi + \bar{v}\varphi'\cos\varphi + v'\cos\varphi + \bar{v}'\sin\varphi$ e anche $\bar{w} = N \wedge w = N \wedge v\cos\varphi + N \wedge \bar{v}\sin\varphi = \bar{v}\cos\varphi - v\sin\varphi$. A questo punto

$$\left[\frac{Dw}{dt}\right] =< \frac{Dw}{dt}, \bar{w} >=< w', \bar{w} >=$$

$$= \varphi'\sin^2\varphi + \varphi'\cos^2\varphi + < v', \bar{v} > \cos\varphi - < v', v > \sin\varphi\cos\varphi + < \bar{v}, \bar{v}' > \sin\varphi\cos\varphi - < \bar{v}', v > \sin^2\varphi =$$

$$= \varphi' + < v', \bar{v} >= \varphi' + \left[\frac{Dv}{dt}\right]$$

dove per le ultime uguaglianze è stato usato che $< v, v' >= 0$ se v è unitario e che (derivando $< v, \bar{v} >= 0$) $< v', \bar{v} > + < v, \bar{v}' >= 0$.

Definizione 3.29 *Una curva $\gamma : [0,a] \to S$ è una **curva semplice chiusa senza cuspidi (CSCSC)** se $\gamma(0) = \gamma(a)$ e $\gamma_{|[0,a)}$ è iniettiva (semplice chiusa), è continua e C^∞ a tratti, diciamo su $[t_i, t_{i+1}]$ dove $0 = t_0 < t_1 ... < t_n = a$ è una qualsiasi partizione, e $\gamma'_-(t_i) = \lim_{t \to t_i^-} \gamma'(t)$ e $\gamma'_+(t_i) = \lim_{t \to t_i^+} \gamma'(t)$ NON siano opposti (senza cuspidi) (deve valere anche nel punto di partenza)*

Definizione 3.30 *Definiamo **angolo esterno** in t_i l'angolo da $\gamma'_-(t_i)$ e $\gamma'_+(t_i)$ scelto nell'intervallo aperto $(-\pi, \pi)$*

Definizione 3.31 *Una **regione** è un sottoinsieme $R \subseteq S$ di una superficie tale che:*

1. *$\circ R \neq 0$ e R è compatto;*
2. *∂R è il supporto di una collezione di CSCSC;*

*Una regione si dice **semplice** se è diffeomorfa a un $\overline{D}^2$ e contenuta in una carta con parametrizzazione ortogonale*

Definizione 3.32 *Sia R una regione semplice (in realtà basta che sia contenuta in una carta) e sia $f : R \to R$ continua; sia $x : \Omega \to U$ una parametrizzazione locale, $R \subseteq U$, allora si definisce **integrale su** R*

$$\int_R f = \int_{x^{-1}(R)} (f \circ x)\sqrt{EG - F^2}dudv$$

OSSERVAZIONI: **(1)** vale che $\|x_u \wedge x_v\| = EG - F^2$ (è un conto, farlo se si ha voglia). La formula deriva dal cambio di variabili
(2) La definizione data non dipende da x (segue dalla formula del cambio di variabili tra a aperti di $\mathbb{R}^2$
(3) Se R non è semplice, si partiziona in regioni semplici che si intersecano solamente nel bordo (che ha misura nulla) e si integra su regioni semplici per poi sommare. Il risultato non dipende dalla partizione. **(4)**Si definisce **Area(R)=**$\int_R 1$

CONVENZIONE: Se R è una regione, orienteremo ogni porzione di ∂R in questo modo: se $v \in T_p(S) - C_p(R)$, cioè v è "uscente", allora $w \in T_p(\partial R)$ è positivo se v, w è base di $T_p(S)$ (ciò ha senso fuori dai punti angolosi) e tutte le parametrizzaizoni di ∂R saranno positive. (Fondamentalmente il senso è antiorario rispetto al verso uscente del vettore normale alla superficie)

Teorema 3.0.32 *Sia $R \subseteq S$ una regione semplice con bordo $\gamma : [0,a] \to \partial R$ C^∞ sui tratti $[t_i, t_{i+1}]$ per ogni $i = 0, ..., n-1$ e con angoli esterni $\theta_0, ..., \theta_{n-1}$ in $\gamma(t_0), ..., \gamma(t_{n-1})$ e sia φ_i una determinazione dell'angolo da $\frac{x_u}{\|x_u\|}$ e γ' nell'intervallo $[t_i, t_{i+1}]$; allora*

$$\sum_{i=0}^{n-1} (\varphi_i(t_{i+1}) - \varphi_i(t_i)) + \sum_{i=0}^{n-1} \theta_i = 2\pi$$

Dimostrazione: Allisciando i vertici (lo posso fare) la sommatoria dei θ_i viene trasportata in φ_i e inoltre non ho più bisogno di tutti φ_i ma ho un unico φ. Quello che voglio mostrare dunque è che $\varphi(t_n) - \varphi(t_0) = 2\pi$ (i termini della sommatoria sono scomparsi perché è una serie telescopica). Sia $\alpha = x^{-1} \circ \gamma$ la curva letta in carta. Chi è adesso φ? φ è diventato l'angolo tra e_1 (immagine di x_u) e $\frac{\alpha'}{\|\alpha'\|}$ (immagine di γ') rispetto alla metrica data dal prodotto scalare

$$\begin{pmatrix} E(\alpha(t)) & F(\alpha(t)) \\ F(\alpha(t)) & G(\alpha(t)) \end{pmatrix}$$

La mappa x potrebbe a priori distorcere gli angoli poiché cambia il prodotto scalare; dovrei usare quello rappresentato dalla matrice). Osserviamo che $\varphi(t_n) - \varphi(t_0) \in 2\pi\mathbb{Z}$ (poiché sono lo stesso angolo, quindi differiscono di multipli di 2π) che è un insieme discreto in $\mathbb{R}$. In ogni punto di Ω $(x : \Omega \to U)$ considero la metrica

$$g_s : s \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + (1-s) \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$$

(stiamo usando che le matrici simmetriche e definite positive sono un insieme convesso. g_0 è il Pullback della metrica su S e g_1 è l'usuale metrica sul piano. Se φ_s è una determinazione dell'angolo tra e_1 e $\frac{\alpha'}{\|\alpha'\|}$ rispetto a g_s posso scegliere $\varphi_s(t)$ che dipende in maniera continua rispetto a (s,t) in modo che $\varphi_0 = \varphi$. In particolare $\varphi_s(t_n) - \varphi(t_0)$ è continuo di s ed è a valori in $2\pi\mathbb{Z}$, dunque è costante in S. Questo ci dice che per calcolare $\varphi(t_n) - \varphi(t_0)$ posso calcolare $\varphi_s(t_n) - \varphi_s(t_0)$ per ogni $s \in [0,1]$. Scegliendo $s = 1$ posso ridurmi a lavorare con la metrica standard nel piano. Adesso tramite un'altra omotopia (in realtà isotopia) posso creare una famiglia di curve α_s con $s \in [0,1]$ tale che $\alpha_0 = \alpha$ e α_1 è una piccola circonferenza e $\forall s$ α_s è CSC e C^∞. Ragioniamo adesso come abbiamo già fatto sopra e pertanto (essendo a valori in un discreto) posso fare il conto scegliendo un s a caso. Scelgo $s = 1$ e faccio il conto sulla circonferenzina. Il conto sulla circonferenza è ovvio (fare per esercizio) e vale 2π.

Teorema 3.0.33 (Gauss-Bernet locale) *Sia $R \subseteq S$ regione semplice. Allora:*

$$\int_R k + \int_{\partial R} K_g + \sum_{i=0}^{n-1} \theta_i = 2\pi$$

con θ_i angoli esterni, k_g curvatura geodetica, k curvatura di Gauss

Dimostrazione: Sia γ una parametrizzazione PLA a tratti positiva di ∂R. Sia $e_1 = \frac{x_u}{\|x_u\|}$ e sia φ_i una determinazione dell'angolo tra da e_1 a γ' su $[t_i, t_{i+1}]$. Il nostro scopo è calcolare la curvatura geodetica e poi integrarla: $k_g(t) = [\frac{D\gamma'}{dt}] = \varphi' + [\frac{De_1}{dt}] = \varphi' + < \frac{De_1}{dt}, e_2 >$ con $e_2 = \frac{x_v}{\|x_v\|}$ dove x è una parametrizzazione $x : \Omega \to U \subseteq \mathbb{R}^2$ è ortogonale positiva, per cui $e_2 = N(\gamma(t)) \wedge e_1(\gamma(t))$. Ragionando in coordinate, se $\gamma(u,v)$, allora $e_1 = \frac{x_u}{\|x_u\|} = E^{-\frac{1}{2}} x_u$. Facciamone la derivata covariante: $\frac{De_1}{dt}$ =roba in $span(e_1) + E^{-\frac{1}{2}}(u'\Gamma_{11}^2 x_v + v'\Gamma_{12}^2 x_v)$ per cui, facendo il punto:

$$k_g(t) = \varphi' + E^{-\frac{1}{2}}(u'\Gamma_{11}^2 + v'\Gamma_{12}^2) < x_v, e_2 >= \varphi' E^{-\frac{1}{2}} G^{\frac{1}{2}}(u'\Gamma_{11}^2 + v'\Gamma_{12}^2)$$

Calcoliamo adesso il valore dei simboli di Christoffel: sappiamo che: $x_{uu} = \Gamma_{11}^1 x_u + \Gamma_{12}^2 x_v + eN$ e dunque

$$-\frac{1}{2}E_v = \frac{\partial}{\partial u} < x_u, x_v > -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial v} < x_u, x_u >=< x_{uu}, x_v >= 0 + \Gamma_{11}^2 G + 0 = \Gamma_{11}^2 G$$

$$\Gamma_{11}^2 = \frac{1}{2G} E_v$$

Analogamente (svolgendo $< x_{uv}, x_v >$) si ottiene $\Gamma_{12}^2 = \frac{1}{2G} G_u$. Scopriamo quindi che

$$k_g = \varphi' + \frac{1}{2\sqrt{EG}}(-u'E_v + v'G_u)$$

A questo punto dobbiamo solo calcolare l'integrale lungo ∂R della curvatura geodetica:

$$\int_{\partial R} k_g = \sum_{i=0}^{n-1} \left(\int_{t_i}^{t_{i+1}} \varphi_i' + \frac{1}{2\sqrt{EG}}(-u'E_v + v'G_u) dt \right) =$$

$$= \left(\sum_{i=0}^{n-1} \varphi_i(t_{i+1}) - \varphi_i(t_i) \right) + \int_0^{t_n} \frac{1}{2\sqrt{EG}}(-E_v u' + G_u v')dt =$$

e grazie al teorema di rotore applicato all'integrale di linea di campo $(-\frac{E_v}{2\sqrt{EG}}, \frac{G_u}{2\sqrt{EG}})$ si ottiene

$$= \left(\sum_{i=0}^{n-1} \varphi_i(t_{i+1}) - \varphi_i(t_i) \right) + \int_{x^{-1}(R)} \left[\left(\frac{G_u}{2\sqrt{EG}} \right)_u + \left(\frac{E_v}{2\sqrt{EG}} \right)_v \right] dudv =$$

e applicando adesso il teorema delle tangenti rotanti e la formula della curvatura di Gauss per parametrizzazioni ortogonali

$$= 2\pi - \sum_{i=0}^{n-1} \theta_i - \int_{x^{-1}(R)} k\sqrt{EG}dudv = 2\pi - \sum_{i=0}^{n-1} \theta_i - \int_R k$$

che è la tesi.

Definizione 3.33 *Un **triangolo** è una regione omeomorfa a $\overline{D}^2$ con tre punti angolosi, detti **vertici**, e dunque tre porzioni C^∞ di bordo, dette **lati**. Un triangolo si dice **geodetico** se i lati sono geodetici*

Corollario 3.0.34 *Sia T un triangolo semplice (in realtà col teorema di Gauss-Bernet globale si può togliere l'ipotesi di semplice) geodetico. Allora la somma degli angoli interni vale $\pi + \int_T k$*

Dimostrazione: Se θ_i sono gli angoli esterni, allora la somma degli angoli interni vale $\sum_{i=1}^3(\pi - \theta_i) = 3\pi - \sum_{i=1}^3 \theta_i$. A questo punto per Gauss-Bernet (ricordandoci che $k_g = 0$ perché triangolo geodetico)

$$\sum_{i=1}^{3} \theta_i = 2\pi - \int_T k \Leftrightarrow \pi + \int_T k = \text{(Somma angoli interni)}$$

Corollario 3.0.35 *Se $p \in S$, T_n è una successione di triangoli semplici geodetici con $p \in T_n \subseteq B(p, \frac{1}{n}$ e $\Delta(T_n) =$(somma degli angoli interni$-\pi$, allora $k(p) = \lim_{n\to\infty} \frac{\Delta(T_n)}{Area(T_n)}$*

Dimostrazione: Ovvio per il teorema della media integrale.

Sia adesso $\gamma : [0, a] \to U$ una parametrizzazione PLA del bordo di unna regione semplice R. Sia $p = \gamma(0) = \gamma(a)$ e sia $v_0 \in T_p(S)$ con $\|v_0\| = 1$. Sia anche $v(t)$ il campo parallelo lungo γ con $v(0) = v_0$:

Proposizione 3.0.36 *Nelle ipotesi sopra scritte $v(a) = R_\theta$ dove R_θ è la rotazione di $T_p(S)$ di angolo θ dove $\theta = \int_R k$. In altre parole il trasporto parallelo lungo γ da $t = 0$ a $t = a$ è la rotazione R_θ.*

Dimostrazione: Sia $e_1 = \frac{x_u}{\|x_u\|}$ come nella dimostrazione di Gauss-Bernet e sia φ determinazione dell'angolo tra e_1 e v lungo γ. Dato che il campo è parallelo vale che:

$$0 = \left[\frac{Dv}{dt}\right] = \left[\frac{De_1}{dt}\right] + \varphi'$$

Integrando adesso lungo ∂R (e ripercorrendo la dimostrazione di Gauss-Bonnet) si ha:

$$0 = \int_{\partial R} \left[\frac{De_1}{dt}\right] + \varphi(a) - \varphi(0) = -\int_R k + \varphi(a) - \varphi(0)$$

Dunque vale che $\theta = \varphi(a) - \varphi(0) = \int_R k$ dove l'uguale vale in quanto $\varphi(a)$ è l'angolo tra e_1 e $v(a)$, $\varphi(0)$ è l'angolo fra e_1 e $v(0)$. (Si noti che è stato mostrato il caso in cui il bordo è liscio; se non lo fosse si spezza tutto)

Corollario 3.0.37 *Come per il corollario del rapporto tra somma degli angoli e area del triangolo possiamo definire la curvatura come* $k(p) = \lim_{n\to\infty} \frac{Rot\theta_n}{Area(R_n)}$ *Dove* R_n *sono regioni sempre più piccole che contengono p in cui varia anche il trasporto parallelo.*

Dimostrazione: Discende direttamente dalla media integrale

Definizione 3.34 *Sia S una superficie, R una regione; una* ***triangolazione*** *di R è un insieme finito* $T_1, ..., T_n$ *si triangoli con* $\bigcup_{i=1}^n T_i = R$ *e* $T_i \cap T_j$ *è o un lato sia di* T_i*, sia di* T_j*, oppure è un vertice sia di* T_i*, sia di* T_j*.*

Definizione 3.35 *Sia* $\mathcal{T}$ *una triangolazione, poniamo* $V = V(\mathcal{T})$ *=numero di* ***vertici*** *della triangolazione,* $E = E(\mathcal{T})$ *=numero di* ***lati*** *della triangolazione,* $F = F(\mathcal{T})$ *=numero di* ***facce*** *della triangolazione. Definiamo* ***caratteristica di Eulero*** *il numero* $\chi(\mathcal{T}) = V - E + T$

Vari disegnini per triangolazioni e triangolazione del toro a partire dal quadrato identificando i lati opposti e triangolazione della sfera ricoprendola con un tetraedro ciccione. Scopriamo in questi disegni due fatti importanti e cioè che la $\chi(\text{toro}) = 0$ e la $\chi(\text{sfera}) = 2$

OSSERVAZIONI:**(1)** Ogni regione R ammette una triangolazione
(2) Se $\mathcal{T}$ è una triangolazione allora esiste $\mathcal{T}'$ triangolazione con triangoli semplici tale che $\chi(\mathcal{T}') = \chi(T)$: basta infatti iterare la suddivisione baricentrica di $\mathcal{T}$ che non cambia la caratteristica di Eulero e notare che, a un certo punto, i triangoli ottenuti avranno diametro minore del numero di Lebegue del ricoprimento (esiste perché R è compatta) associato a un atlante ortogonale. In particolare, dopo un passo della suddivisione baricentrica, si ha $V' = V + E + F$, $E' = 2E + 6F$, $F' = 6F$ e dunque $V' - E' + F' = V - E + F$

Teorema 3.0.38 (Gauss-Bonnet) *Sia R una regione con triangolazione* $\mathcal{T}$*, allora vale:*

$$\int_{\partial R} k_g + \int_R k + \sum_{angoliesterni} \theta_i = 2\pi\chi(\mathcal{T})$$

In particolare χ *dipende solamente da R è pertanto lecito chiamare* $\chi(R)$ *la* ***caratteristica di una regione****.*

Dimostrazione: Grazie alle osservazioni precedenti possiamo mostrare Gauss-Bonnet assumendo che i triangoli siano semplici. Possiamo dunque applicare per ogni triangolo T_i il teorema di Gauss-Bonnet locale da cui:

$$\int_{\partial T_i} k_g + \int_{T_i} k + \sum_{j=1}^{3} \theta_i^j = 2\pi$$

dove i θ_i^j sono gli angoli esterni del triangolo T_i. Poniamo adesso $\varphi_i^j = \pi - \theta_i^j$ gli angoli interni corrispondenti. Per cui vale $\sum_{j=1}^3 \theta_i^j = 3\pi - \sum_{j=1}^3 \theta_i^j$. Osserviamo adesso che (sommando su tutti i triangoli T_i) i contributi di k_g si annullano se non stiamo percorrendo il bordo della regione R (gli interni sono percorsi una volta in un senso, una volta in un altro). Notiamo anche che sommando sui T_i della triangolazione il termine $\int_{T_i} k$ si ottiene l'integrale su tutta la regione. Pertanto, sommando sui triangoli della triangolazione si ha:

$$\int_{\partial R} k_g + \int_R k + 3\pi F - \sum_{i,j} \varphi_i^j = 2\pi F$$

dove F è il numero di facce della triangolazione. Dobbiamo capire chi è la sommatoria degli angoli. Poniamo adesso $V = V_e + V_i$ dove V_e è il numero di vertici nel bordo e V_i è il numero di vertici nella parte interna. Allo stesso modo poniamo $E = E_e + E_i$ dove E_e è il numero di lati sul bordo e E_i è il numero di lati non sul bordo. Osserviamo innanzitutto che $V_e = E_e$ poiché ∂R è unione di poligoni. Suddividiamo ancora $V_e = V_{er} + V_{et}$ dove V_{er} è il numero dei vertici veri di ∂R, mentre V_{et} è il numero dei vertici "lisci" di ∂R. Detti adesso $\theta_1, ..., \theta_k$ gli angoli esterni di R (quelli veri (relativi a $V_e r$)) si ottiene

$$\sum_{i,j} \varphi_i^j = 2\pi V_i + \pi V_{et} + \sum_{i=1}^{k} (\pi - \theta_i) = 2\pi V_i + \pi V_{et} + \pi V_{er} - \sum_{i=1}^{k} \theta_i =$$

$$= 2\pi V_i + \pi V_e - \sum_{i=1}^{k}$$

E rimettendo questa relazione nel formulone si ha:

$$\int_{\partial R} kg + \int_R k + 3\pi F - 2\pi V_i - \pi V_e + \sum_{i=1}^{k} \theta_i = 2\pi F$$

Osserviamo adesso che vale la relazione $3F = E_e + 2E_i$ (fare un double-counting sulla triangolazione) e quindi:

$$\int_{\partial R} k_g + \int_R k + \pi E_e + 2\pi E_i - 2\pi V_i - \pi V_e + \sum_{i=1}^{k} = 2\pi F$$

A questo punto sommiamo a sinistra la quantità $0 = \pi(E_e - V_e)$ ottenendo:

$$\int_{\partial R} k_g + \int_R k + 2\pi E_e + 2\pi E_i - (2\pi V_i + 2\pi V_e) + \sum_{i=1}^{k} = 2\pi F$$

$$\int_{\partial R} k_g + \int_R k + \sum_{i=1}^{k} = 2\pi(V - E + F) = 2\pi\chi(\mathcal{T})$$

Osservazione: $\chi(R)$ dipende solo dal tipo di diffeomorfismo di R (posso infatti trasportare le triangolazioni tramite diffeomorfismo)

Corollario 3.0.39 *Se S è una superficie compatta (e orientabile), allora $\int_S k = 2\pi\chi(S)$*

Dimostrazione: Non ho il bordo e nemmeno gli angoli esterni, dunque Gauss-Bonnet mi da questo risultato

Osservazione: Sia S una superficie diffeomorfa alla sfera, allora $\int_S k = 2\pi\chi(S) = 2\chi(S^2) = 4\pi$. Sia S' una superficie diffeomorfa al toro, allora $\int_{S'} k = 0$

Corollario 3.0.40 *Sia T un triangolo geodetico in S^2 con angoli interni $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$: allora l'area di T vale $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - \pi$*

Dimostrazione: Se $\theta_i = \pi - \alpha_i$ è l'angolo esterno corrispondente ad α_i allora per Gauss-Bonnet

$$\int_T k + \int_{\partial T} k_g + \sum_{i=1}^{3} \theta_i = 2\chi(T) \Rightarrow Area(T) + 0 + 3\pi - (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) = 2\pi$$

$$Area(T) = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - \pi$$

Teorema 3.0.41 (no dim) *Sia S una superficie (eventualmente con bordo) compatta e orientabile, allora S è diffeomorfa a $S_{g,n}$ per qualche $g \geq 0$, $n \geq 0$ dove g è il* ***genere****, cioè il numero di buchi e n è il* ***numero di punture****, ovvero il numero di componenti connessi di $\partial S_{g,n}$. Per convenzione si indica con $S_g = S_{g,0}$. Vale inoltre che $\chi(S_{g,n}) = 2 - 2g - n$ (si può fare come esercizio)*

ESEMPIO: $S^2 = S_{0,0}$, il toro è $S_{1,0}$. La χ della corona circolare è come la χ del toro che è 0.
OSSERVAZIONE: Se la superficie è senza bordo allora la $\chi \geq 0$ se e solo se $g = 1$ o $g = 1$.

Corollario 3.0.42 *Tutte le superfici compatte e orientabili si immergono in $\mathbb{R}^3$*

Dimostrazione: Ovvia

Corollario 3.0.43 *Sia S una superficie compatta senza bordo orientabile con $k(p) \geq 0$ per ogni $p \in S$, allora S è diffeomorfa a S^2.*

Dimostrazione: Se S è compatta, allora esiste un punto $p \in S$ con $k(p) > 0$ (proposizione vista) e dunque per continuità di k $k_{|U} > \varepsilon$ in un certo aperto $U \subseteq S$ per qualche $\varepsilon > 0$. Allora per il teorema di Gauss-Bonnet

$$2\chi(S) = \int_S k = \int_U k + \int_{S-U} k \geq \varepsilon Area(U) + 0 > 0$$

Dunque $\chi(S) > 0$ e quindi è diffeomorfa a S^2 (ho solo una scelta perché è senza bordo).

Esercizio 3.0.6 *Sia $0 < h < 1$ e sia $R_h \subseteq S^2$ con $R_h = \{(x, y, z)|0 \leq z \leq h\}$*
(1)*Calcolare kg delle componenti del bordo di h;* ***(2)****Calcolare $Area(R_h)$ usando il teorema di Gauss-Bonnet.*

Soluzione: Osserviamo che R_h è una regione e che il bordo è formato da curve CSCSC poiché sono semplici circonferenze. Se volessi calcolare solo il modulo di k_g potrei usare la formula $k^2 = k_n^2 + k_g^2$ dove k_n è la curvatura normale. Dunque se γ_0 parametrizza l'equatore $\{z = 0\}$ e γ_h parametrizza la circonferenza $z = h$ che ha raggio $\sqrt{1 - h^2} = r_h$. Poiché $|k_n| = 1$ su S^2 (poiché $dN = \pm id \Rightarrow II = \pm I \Rightarrow |k_n| = 1$ per ogni curva in ogni punto). Dunque per γ_0 si ha $k_g^2 = k^2 - k_n^2 = 1 - 1 = 0$. Per γ_h, invece, $k_g^h = k^2 - k_n^2 \Rightarrow k_g^2 = (\frac{1}{r_h})^2 - 1 \Rightarrow k_g^2 = \frac{1}{1-h^2} - 1 \Rightarrow k_g^2 = \frac{h^2}{1-h^2} \Rightarrow \|k_g\| = \frac{h}{\sqrt{1-h^2}}$. Se voglio calcolare tutto per bene fisso $N(p) = p$ per ogni $p \in S^2$; osservo che $z = 0$ è geodetica, allora $k_g = 0$ su di essa. Vogliamo adesso parametrizzare la curva γ_h per lunghezza d'arco e positivamente; agiamo per passi:

$$\gamma_h(t) = (\sqrt{1 - h^2} \cos t, \sqrt{1 - h^2} \sin t, h)$$

Questa parametrizzazione ha due problemi: la curva gira in senso antiorario (e deve girare in senso orario per disegno) e inoltra la sua velocità non è costantemente 1 in modulo. Per ovviare a questo problema cambio t con $-t$ e riscalo la velocità della curva ottenendo:

$$\gamma_h : [0, 2\pi\sqrt{1 - h^2}] \to S^2 \quad \gamma_h(t) = (\sqrt{1 - h^2} \cos \frac{t}{\sqrt{1 - h^2}}, -\sqrt{1 - h^2} \sin \frac{t}{\sqrt{1 - h^2}}, h)$$

Ricordando la definizione di k_g, ovvero $k_g =< \gamma_h'', N(\gamma_h) \wedge \gamma_h' >$ calcoliamo tutti gli elementi necessari:
$N(\gamma_h) = \gamma_h = (\sqrt{1 - h^2} \cos \frac{t}{\sqrt{1-h^2}}, -\sqrt{1 - h^2} \sin \frac{t}{\sqrt{1-h^2}}, h)$
$\gamma_h' = (- \sin \frac{t}{\sqrt{1-h^2}}, - \cos \frac{t}{\sqrt{1-h^2}}, 0)$

$\gamma_h'' = \frac{1}{\sqrt{1-h^2}}(-\cos\frac{t}{\sqrt{1-h^2}}, \sin\frac{t}{\sqrt{1-h^2}}, 0)$ $\gamma_h \wedge \gamma_h' = (h\cos\frac{t}{\sqrt{1-h^2}}, -h\sin\frac{t}{\sqrt{1-h^2}}, \frac{h}{\sqrt{1-h^2}})$ E pertanto la curvatura geodetica risulta essere:

$$k_g(t) =< \gamma_h'', N(\gamma_h) \wedge \gamma' >= -\frac{h\cos^2\frac{t}{\sqrt{1-h^2}}}{\sqrt{1-h^2}} - \frac{h\sin^2\frac{t}{\sqrt{1-h^2}}}{\sqrt{1-h^2}} = -\frac{h}{\sqrt{1-h^2}}$$

E dunque abbiamo scoperto che il segno era un $-$ (si poteva anche capire mettendoci a vedere il disegno e argomentando partendo da lì)
Calcoliamo adesso quanto vale l'area di questa regione: osserviamo che $\chi(R_h) = 0$ in quanto $R_h = S_0, 2$. Per Gauss-Bonnet vale:

$$2\pi\chi(R_h) = \int_{\gamma_0} k_g + \int_{\gamma_h} k_g + \int_{R_h} k + \sum_i \theta_i$$

e notando che γ_0 è geodetica, k è costantemente 1 sulla sfera, che R_h non ha angoli esterni e che $\chi(R_h) = 0$ otteniamo:

$$0 = \int_0^{2\pi\sqrt{1-h^2}} -\frac{h}{\sqrt{1-h^2}}dt + \int_{R_h} 1 \Leftrightarrow Area(R_h) = 2\pi h$$

Si poteva concludere direttamente questo risultato perché è possibile creare una mappa che va dalla sfera al cilindro e tale che l'area delle regioni venga conservata (immaginare una sfer dentro un cilindro e proiettare radialmente). Dunque non esiste una carta da piano a sfera che conserva le distante, ma ne esiste una che conserva le aree

Definizione 3.36 *Sia $p \in S$; p si dice* ***punto ombelicale*** *se $dN_p = \lambda I_d$, cioè le due curvature principali coincidono.*

Proposizione 3.0.44 *Sia S una superficie connessa con tutti i punti ombelicali, allora S è una porzione di piano o una porzione di sfera.*

Dimostrazione: Fissiamo $N : S \to S^2$ mappa di Gauss. Per ipotesi esiste $\lambda : S \to \mathbb{R}$ funzione C^∞ (è facile mostrarlo...) tale che $dN_p = \lambda(p)I$. Osserviamo che se la tesi fosse vera, allora λ è costante. Dimostriamo dunque che λ è costante: per connessione, basta mostrare che è localmente costante. Sia U un aperto coordinato con $x : \Omega \to U$ parametrizzazione locale. Pensiamo come al solito che λ e N siano definiti su Ω: allora da $dN(x_u) = \lambda x_u$ e $dN_p = \lambda x_v$ si ha, riscrivendo in coordinate, $N_u = \lambda x_u$ e $N_v = \lambda x_v$. Derivando le due uguaglianze rispetto a v, u rispettivamente si otteniamo $N_{uv} = \lambda_v x_u + \lambda x_{uv}$ e $N_{vu} = \lambda_u x_v + \lambda x_{vu}$. Usiamo ora il teorema di Scwartz per le derivate miste e imposnendo l'uguaglianza si ha: $\lambda_v x_u - \lambda_u x_v = 0$ in ogni punto. Ma x_u e x_v sono linearmente indipendenti e dunque i coefficienti λ_u e λ_v sono costantemente uguali a 0. Questo ci dice che λ è costante su U. Abbiamo adesso due casi da analizzare:

1. Se $\lambda = 0$, allora $dN = 0$, cioè N è costante; sia $f : S \to \mathbb{R}$ tale $f(p) =< N, p >$, allora per ogni $v \in T_p(S)$, $df_p(v) =< dN_p(), v >= 0$. Dunque $df = 0$ su S, cioè per connessione, f è costante ovvero $S \subseteq \{x| < N, x >= a$ per qualche $a \in \mathbb{R}\}$, cioè S è contenuta in un piano affine;

2. Se $\lambda \neq 0$, definisco $f : S \to \mathbb{R}^3$ come $f(p) = p - \frac{1}{\lambda}N(p)$ (sto definendo la porzione di sfera). Allora $df_p = I - \frac{1}{\lambda}dN_p = I - I = 0$. Dunque f è costante, cioè esiste $c \in \mathbb{R}^3$ tale che $f(p) = c$ per ogni $p \in S$. Cioè vale che $p - c = \frac{1}{\lambda}N(p)$ da cui $\|p - c\| = \frac{1}{\|\lambda\|}$ e dunque la mia superficie S giace tutto sulla sfera di centro c e raggio $\frac{1}{\lambda}$.

Capitolo 4

Ultima Parte

REMINDER: $f : M \to N$ tra varietà: $x \in M$ è un punto critico per f se df_x non è suriettivo, e regolare altrimenti. $y \in N$ è valore critico se è immagine di un punto critico, e regolare altrimenti.

Proposizione 4.0.1 *Sia $f : M \to N$ tra varietà. L'insieme dei punti critici di f è un chiuso di M. Se, inoltre, M p compatta, i valori critici sono un chiuso di N*

Dimostrazione: Mostriamo che se $x \in M$ è un valore regolare, esiste un aperto U di x in M fatto di punti regolari. Siano $\varphi : \Omega_1 :\to U$ e $\psi : \Omega_2 \to V$ carte intorno a x e a $f(x)$ rispettivamente in modo che $\psi^{-1} \circ f \circ \varphi : \Omega_1 \to \Omega_2$ sia ben definita. Per ipotesi, se $p = \varphi^{-1}(x) \in \Omega_1$, $d\psi^{-1}_{f(x)} \circ df_x \circ d\varphi_p$ è suriettivo per ipotesi. Ma $d(\psi^{-1} \circ f \circ \varphi) : \mathbb{R}^m \to R^n$ con $m = dimM$ e $n = dimN$ e dunque è una matrice $n \times m$ che è suriettiva $\Leftrightarrow$ ha rango massimo $\Leftrightarrow$ esiste un minore $n \times n$ invertibile, cioè con determinante diverso da 0. Poiché il determinante è una funzione continua e la matrice data da $d(\psi^{-1} \circ f \circ \varphi)$ dipende in maniera continua da q, ne segue che il determinante di questo fissato minore è diverso da 0 in un intorno $\Omega' \subseteq \Omega_1$ di q. Ma allora $d(\psi^{-1} \circ f \circ \varphi)_q$ è suriettivo per ogni $q \in \Omega'$ e df_z è suriettivo per ogni $z \in \varphi(\Omega')$ che è l'intorno di x cercato. Dunque i punti regolari sono un aperto e di conseguenza i punti critici sono un chiuso che chiamiamo C. Se adesso M è compatto, allora C è chiuso in compatto e dunque compatto; $f(C)$ è compatto perché f è continua, $f(C)$ è chiuso perché compatto in T2. Ma $f(C)$ sono proprio i valori critici, dunque si ha la tesi.

Proposizione 4.0.2 *Sia $f : M \to N$, $dimM = dimN$, M compatta, $R \subseteq N$ insieme dei valori regolari di f. Allora $f_{|f^{-1}(R)} : f^{-1}(R) \to R$ è un rivestimento a finiti fogli (eventualmente sconnesso)*

Dimostrazione: Per definizione, per ogni $p \in f^{-1}(R)$, allora df_p è suriettivo, dunque è un isomorfismo (dimensione), dunque $f_{|f^{-1}(R)}$ è diffeomorfismo locale per il teorema di invertibilità locale. Sia adesso $q \in R$, $\forall p \in f^{-1}(q)$, esiste U_p tale che $f_{|U_p} : U_p \to f(U_p)$ sia un diffeomorfismo (dove U_p è un aperto che contiene p). In particolare p è l'unico punti di U_p portato da f in q e dunque la fibra $f^{-1}(q)$ ha la topologia discreta. Essendo anche chiuso (poiché controimmagine di chiuso) è compatto (in quanto M è compatta) e dunque compatto con topologia discreta implica finito. Sia perciò $f^{-1}(q) = \{p_1, ..., p_k\}$; definisco l'intorno ben rivestito (l'aperto banalizzante) V di q nel seguente modo:

$$V = \bigcap_{i=1}^{k} f(U_{p_i}) - f(M - \bigcup_{i=1}^{k} U_{p_i})$$

dove il primo è aperto perché intersezione finita di aperti, il secondo è chiuso poiché ciò che è dentro la parentesi è chiuso e f è una applicazione chiusa. Dunque V è aperto e contiene q;

per costruzione vale che $f^{-1}(V) = \bigcup_{i=1}^{k}(U_{p_i} \cap f^{-1}(V))$ e che $f_{|U_{p_i} \cap f^{-1}(V)} : U_{p_i} \cap f^{-1}(V) \to V$ è diffeomorfismo per ogni $i = 1, ..., k$

Esempio: spirale che sale e riveste $\mathbb{R}$ dove si vede bene chi sono i valori critici. Volendo da qui si può anche far vedere che in generale i valori critici non sono un chiuso

Teorema 4.0.3 (Teorema fondamentale dell'algebra) *Ogni polinomio non costante $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ è suriettivo.*

Dimostrazione: Identifico $\mathbb{C}$ con $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^2$ con $S^2 - \{(0,0,1)\}$ tramite la proiezione stereografica che è un diffeomorfismo. In questo modo il polinomio p definisce una mappa C^∞ da $S^2 - \{0,0,1\}$ in se stesso. Tale funzione si prolunga a una funzione C^∞ $\bar{p} : S^2 \to S^2$ tale che $\bar{p}(0,0,1) = (0,0,1)$ (il fatto che $\bar{p}$ sia continua segue banalmente dal fatto che $\|p(z)\| \to \infty$ quando $\|z\| \to \infty$. Per vedere che $\bar{p}$ è C^∞ in $(0,0,1)$ devo controllarlo in carta (conviene usare l'altra proiezione stereografica in quanto, rispetto alla coordinata complessa z su $\mathbb{C}$, il cambio di carta è semplice ed è:$z \mapsto \frac{1}{\bar{z}}$)). Dunque $\bar{p} : S^2 \to S^2$ è C^∞. Osserviamo che se f è derivabile in senso complesso, allora $f'(z) = a + ib$ e $df_z : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ è $\begin{pmatrix} a & -bb & a \end{pmatrix}$ e dunque z è un valore critico se e soltanto se a e b sono entrambi nulli $\Leftrightarrow f'(z) = 0$. Dunque i punti critici di $\bar{p}$ sono gli $z \in S^2 - \{0,0,1\}$ tali che $p'(z) = 0$ (ed eventualmente $(0,0,1)$). Dunque, poiché p è non costante, allora p'è un polinomio non nullo e ha un numero finito di zeri per il teorema di Ruffini. Perciò i punti critici di $\bar{p}$ sono in numero finito e dunque lo sono anche i valori critici. Dunque $R = S^2 - \{valori\ critic\}$ è connesso e dunque $\bar{p}_{|\bar{p}^{-1}(R)} : \bar{p}^{-1}(R) \to R$ è un rivestimento tra spazi connessi (anche $\bar{p}^{-1}(R)$ lo è) e dunque è suriettivo. Dunque $R \subseteq \bar{p}(S^2)$, che è compatto, dunque chiuso in S^2. Ma la chiusura di R in S^2 è S^2 stesso e dunque $\bar{p}$ è suriettivo; dunque p è suriettivo e si ha la tesi

Introduciamo adesso i **Quaternioni** e sfruttiamoli per mostrare che $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ è isomorfo a $SO(3)$

Definizione 4.1 *Definiamo **Quaternioni** $\mathbb{H}$ l'insieme $(R^4, <, >)$ con la seguente struttura moltiplicativa: se (a, v) e $(b, w) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 = \mathbb{H}$, allora $(a, v)(b, w) = (ab - < v, w >, v \wedge w + av + bv)$. Questa definizione traduce indentifica i quaternioni con l'usuale definizione: $\mathbb{H} = span_{\mathbb{R}}(1, i, j, k)$ con moltiplicazione $\mathbb{R}$-lineare tale che $i^2 = j^2 = k^2 = -1$ e $ij = k$, $jk = i$, $ki = j$.*

Proprietà dei Quaternioni: Ogni elemento, se non specificato viene pensato dentro ai quaternioni:

1. Esiste il coniugio: $\overline{(a, v)} = (a, -v)$;
2. $\|h\| = h_1\bar{h}$ (semplice verifica);
3. $\overline{h_1 h_2} = \bar{h_1}\bar{h_2}$;
4. $\|h_1 h_2\| = \|h_1\|\|h_2\|$;
5. se $h \neq 0$, allora $h^{-1} = \frac{\bar{h}}{\|h\|^2}$
6. $Z(\mathbb{H}) = \mathbb{R}$: infatti $(a, v)(b, w) = (b, w)(a, v) \Leftrightarrow (ab - < v, w >, aw + bv + (v \wedge w))) = (ba - < v, w >, aw + bv + (w \wedge v)) \Leftrightarrow (v \wedge w) = (w \wedge v)$ per ogni $w \Leftrightarrow v = 0$

Osservazione: $\mathbb{H}^*$ è un gruppo di Lie non abeliano diffeomorfo a $\mathbb{R}^4$

Osservazione: S^3 è un sottogruppo di $\mathbb{H}^*$ in quanto se $h_1, h_2 \in S^3$, $\|h_1 h_2\| = \|h_1\|\|h_2\| = 1$ e anche $\|h^{-1}\| = \frac{\|\bar{h}\|}{\|h\|^2} = 1$

Corollario 4.0.4 *S^3 ammette una struttura di gruppo di Lie; in particolare S^3 è parallelizzabile e pettinabile. (I gruppi di Lie sono parallelizzabili: basta prendere una base $v_1, ..., v_n$ in $T_e(G)$ e porre $v_i(g) = (dL)_g(v_i)$*

Proposizione 4.0.5 *Il piano proiettivo $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ è diffeomorfo a $SO(3)$.*

Dimostrazione: Vogliamo costruire una mappa da S^3 in $SO(3)$: vediamo come fare: sia $p \in S^3$, consideriamo la mappa $\psi(p) : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ data da: $\psi(p)(h) = ph\bar{p}$. Poiché $\mathbb{R} \in Z(\mathbb{H})$, $\psi(p)$ è una mappa lineare e la consideriamo come un endomorfismo di $\mathbb{R}^4$. Inoltre $\|\psi(p)(h)\| = \|p\|\|h\|\|\bar{p}\| = \|h\|$ cioè $\psi(p) \in O(4)$. Ho trovato dunque una applicazione $\psi : S^3 \to O(4)$. Osserviamo che ψ è un omomorfismo di gruppi di Lie: è una funzione C^∞ (c'è da fare un conto esplicito) e inoltre $\psi(pq)(h) = pqh(\overline{pq}) = p(qh\bar{q})\bar{p} = \psi(p)(\psi(q)(h))$ e dunque è morfismo. Osserviamo che per ogni $h \in \mathbb{R}$, poiché h commuta con tutto, $\psi(p)(h) = ph\bar{p} = php^{-1} = h$. Vale dunque che per ogni $p \in S^3$ $\psi(p)(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ e dunque, poiché $\psi \in O(4)$, allora $\psi(p)(\mathbb{R}^\perp) = \mathbb{R}^bot = \{(0, x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{H}\}$ che identifichiamo con $\mathbb{R}^3$. Chiamiamo $\varphi(p)$ la restrizione di $\psi(p)$ a $\mathbb{R}^3$ e ho finalmente ottenuto una mappa $\varphi : S^3 \to O(3)$ che è anche lui omomorfismo di gruppi di Lie. Vogliamo capire chi è il ker e chi è l'immagine: $dimS^3 = 3 = \frac{3(3-1)}{2} = dimO(3)$ e dunque le dimensioni sono uguali come varietà. Calcoliamo $d\varphi_e : T_e(S^3) \to T_e(O(3))$ con $e = (1,0,0,0) \in S^3$ (vogliamo mostrare che il differenziale è suriettivo e poi usare che stiamo ragionando tra gruppi di Lie). $T_e(S^3) = (1,0,0,0)^\perp = \{(0,v)|v \in \mathbb{R}^3\}$. $(0,v) \in kerd\varphi_e \Leftrightarrow$ (in quanto $\tilde{\psi}$ estende φ in maniera C^∞ $\Leftrightarrow$ $(0,v) \in kerd\tilde{\psi}_e$ dove $\tilde{psi} : \mathbb{H} \to End(\mathbb{H}) \supseteq O(4) \supseteq O(3)$ con $\tilde{\psi}(p)(h) = ph\bar{p} \Leftrightarrow 0 = \frac{d}{dt}_{|t=0}\tilde{\psi}(e + t(0,v)) \Leftrightarrow \forall h \in \mathbb{H}, 0 = \frac{d}{dt}_{|t=0}\tilde{\psi}(e + t(0,v))(h)$: $\tilde{\psi}(1,tv)(h) = (1,tv)h(1,-tv)$ la cui derivata rispetto al tempo (usando la regola di Leibnitz) è $(0,v)h - h(0,v)$ che si annulla per ogni h se e soltanto se $(0,v) \in Z(\mathbb{H})$ e dunque se e soltanto se $v = 0$. Dunque vale che $kerd\varphi_e = 0$ e per motivi dimensionali si ha che $d\varphi_e$ è isomorfismo. Poiché adesso $rk(d\varphi_p)$ NON dipende da p in S^3 perché è un omomorfismo di gruppi di Lie, allora $d\varphi_p$ è isomorfismo per ogni $p \in S^3$. Dunque abbiamo scoperto che tutti i punti sono regolari e tutti i valori sono regolari. Per connessione $\varphi(S^3) \subseteq SO(3)$ e, per quanto dimostrato nelle proposizioni precedenti $\varphi : S^3 \to SO(3)$ è un rivestimento a finiti fogli (in particolare è suriettivo). A questo punto $p \in ker\varphi \Leftrightarrow \forall h \in \mathbb{H}$ $\varphi(p)(h) = h \Leftrightarrow php^{-1} = h \Leftrightarrow ph = hp \Leftrightarrow p \in Z(\mathbb{H}) \cap S^3 \Leftrightarrow p = (\pm 1, 0, 0, 0)$. Grazie adesso alla proprietà universale delle identificazioni, si ha che φ passa al quoziente (che è $\mathbb{P}^3$) e induce un isomorfismo con l'immagine (che è $SO(4)$).

Osservazione: Usando la mappa da $S^3 \times S^3 \to End(\mathbb{H})$ tale che $(p,q) \mapsto (h \mapsto ph\bar{q})$ e procedendo in modo analogo a quello visto si può dimostrare che $SO(4)$ è isomorfo a $(S^3 \times S^3)/\pm id$. In particolare ne deduciamo che $\pi_1(SO(3)) = \pi_2(SO(4)) = \mathbb{Z}_2$. (vale in generale che $\pi_1(SO(n)) = \mathbb{Z}_2$ per ogni $n > 2$

Esercizio 4.0.1 *Sia $\gamma : I \to S^2$ PLA, allora γ è piana $\Leftrightarrow$ ha curvatura costante*

Svolgimento:$\Rightarrow$)se γ è piana, allora è supportata nell'intersezione di S^2 con un piano affine, dunque in una circonferenza che ha curvatura costante
$\Leftarrow$)Sappiamo che $< \gamma, \gamma >= 1$ (dunque γ biregolare) poiché $\gamma(s) \in S^2$; dunque derivando si ottiene: $< t, \gamma >= 0$ e dunque $\gamma(s) \in span(n(s), b(s))$ per ogni $s \in I$. Vale dunque che $\gamma(s) = \alpha(s)n(s) + \beta(s)b(s)$ da cui, derivando, $t = \alpha' n + \alpha n' + \beta' b + \beta b'$ e, per le formule di Frenet, $t = \alpha' n + \alpha(-kt - \tau b) + \beta\tau n + b\beta'$ e dunque $t(-\alpha k - 1) + n(\alpha' + \beta\tau) + b(-\alpha\tau + \beta') = 0$. Sfruttando adesso che t, n, b sono linearmente indipendenti otteniamo un sistema:

$$\begin{cases} \alpha k + 1 = 0 \\ \alpha' + \beta\tau = 0 \\ -\alpha\tau + \beta' = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha = -\frac{1}{k} \\ \beta\tau = 0 \quad (1) \\ \frac{\tau}{k} + \beta' = 0 \quad (2) \end{cases}$$

Vogliamo mostrare che $\tau = 0$. Sia $s \in I$, se $\exists \varepsilon > 0$ tale che in $(s - \varepsilon, s + \varepsilon)$ $\beta = 0$, allora $\beta'(s) = 0$ e da (2) deduco che $\alpha(s)\beta(s) = 0$ e cioè $\tau(s) = 0$ in $(s - \varepsilon, s + \varepsilon)$. Altrimenti esiste $s_n \to s$ tale che $\beta(s_n) \neq 0$ per ogni n, ma allora da (1) ho che $\tau(s_n) = 0$ per ogni n e dunque $\tau(s) = 0$ per continuità di τ. Dunque $\tau = 0$ e γ è piana.

Esercizio 4.0.2 *Si calcoli l'area del toro ottenuto facendo ruotare la circonferenza di raggio R centrata in $(a, 0, 0)$ con $a > R$*

Svolgimento: Una parametrizzazione del toro T è data da $x(u, v) = ((a + R\cos u)\cos v, (a + R\cos u)\sin v, R\sin u)$ poiché $\gamma(t) = (a + R\cos t, R\sin t, 0)$ è una parametrizzazione della direttrice. Per calcolare l'area è sufficiente integrare $\sqrt{EG - F^2}$ nel dominio $[0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$. Calcoliamo $EG - F^2 = \|x_u \wedge x_v\|^2$:
$x_u = (-R\sin u\cos v, -R\sin u\sin v, R\cos u)$ $x_v = (-(a + R\cos u)\sin v, (a + R\cos u)\cos v, 0)$ $x_u \wedge x_v = (-R(a + R\cos u)\cos u\cos v, -R(a + R\cos u)\cos u\sin v, -R(a + R\cos u)\sin u)$ da cui otteniamo che $\|x_u \wedge s_v\| = \sqrt{EG - F^2} = R(a + R\cos u)$ da cui:

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} R(a + R\cos u)dudv = 2\pi\int_0^{2\pi}(aR^2 + R^2\cos u)du = 2\pi(2\pi aR) = (2\pi a)(2\pi R)$$

Definizione 4.2 *Sia $H^n = \{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n | x_n \geq 0\}$. Una **n-varietà con bordo** M è un sottoinsieme $M \subseteq \mathbb{R}^N$ tale che ogni $x \in M$ ha un intorno aperto diffeomorfo a un aperto di H^n. Carte, parametrizzazioni locali e atlanti si definiscono come nel caso senza bordo. Il **bordo** di M e $\partial M = \{p \in M | T_p(M) \neq C_p(M)\}$*

Poiché questa definizione è invariante per diffeomorfismo, se $p \in H^n$, $T_p(H^n) = C_p(H^n) \Leftrightarrow x_n(p) > 0$ e anche:

1. ∂H^n è effettivamente il bordo topologico $\{x_n = 0\}$ di H^n (H^n è una varietà con bordo con atlante banale)

2. Se $\varphi : \Omega \to U \subseteq M$ con $\Omega \subseteq H^n$ aperto è una parametrizzazione locale, allora $\partial M \cap U = \varphi(\Omega \cap \partial H^n)$

Corollario 4.0.6 *Se M è una n-varietà con bordo, allora ∂M è una $(n - 1)$ varietà senza bordo*

Dimostrazione: Se identifichiamo ∂H^n con R^{n-1} e $\Omega \subseteq H^n$, allora $\Omega \cap H^n$ è aperto in $\mathbb{R}^{n-1}$. La restrizione a ∂H^n delle mappe di un atlante per M, danno un atlante per ∂M.

Definizione 4.3 (Lemma) *Se M è orientata, ∂M ammette un'orientazione indotta così definita: "il primo punta fuori": se $p \in \partial M$ e $v_1 \in T_p(M) - C_p(M)$, dico che $(v_2, ..., v_m)$ è una base positiva di $T_p(\partial M)$ se $(v_1, ..., v_n)$ è una base positiva del $T_p(M)$*

Questa è una definizione lemma perché dovremmo verificare che è una ricetta ben definita puntualmente (cioè per basi equivalenti) e che la definizione è localmente coerente. Si può però dedurre la buona definizione dalla seguente:
Osservazione: Sia $e_1, ..., e_{n-1}$ la base canonica di $\mathbb{R}^{n-1} = \partial H^n = T_p(\partial H^n)$ per ogni $p \in \partial H^n$: è positiva? $e_1, ..., e_{n-1}$ è positiva rispetto all'orientazione definita su $\partial H^n \Leftrightarrow$ scelto $v \in \mathbb{R}^n$ uscente a caso, $v = \sum_{i=1}^{n-1} a_i e_i + \lambda e_n$ con $\lambda < 0$. La base $v_1, e_1, ..., e_{n_1}$ è positiva se e solo se il determinante della matrice del cambio di base dalla canonica a $v_1, e_1, ..., e_{n-1}$ è positivo e ciò accade se e solo se $(-1)^{n-1}\lambda > 0$ se e solo se n è pari. In particolare un atlante orientato per M induce un atlante orientato su ∂M con la giusta orientazione se n è pari, quella sbagliata altrimenti (una volta mostrata la buona definizione puntuale, questa osservazione mostra la locale coerenza).

Proposizione 4.0.7 *Sia M una varietà senza bordo, $f : M \to \mathbb{R}$ C^∞ e $\lambda \in \mathbb{R}$ valore regolare: allora $f^{-1}((-\infty, \lambda]), f^{-1}([\lambda, +\infty))$ sono varietà con bordo di dimensione $n = dimM$, il cui bordo è $f^{-1}(\lambda)$*

Dimostrazione: Sia $N = f^{-1}((-\infty, \lambda])$ e sia $q \in N$. Se $f(q) < \lambda$, allora $q \in f^{-1}((-\infty, \lambda))$, che è un aperto di M e dunque ha un intorno diffeomorfo a un aperto di $\mathbb{R}^n$. Se $f(q) = \lambda$, a meno di passare in carta, q ha un intorno in M diffeomorfo a un aperto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ tale che f, letta in carta, sia una proiezione su una coordinata, diciamo l'ultima. Dunque $U \cap N$ è diffeomorfo a $\Omega \cap \{x_n \leq \lambda\}$ che è a sua volta diffeomorfo a un aperto di H^n

Proposizione 4.0.8 *Siano M una m-varietà con bordo, N una n-varietà senza bordo e sia $f : M \to N$ funzione C^∞. Sia q un valore regolare sia per f che per $f_{|\partial M}$. Allora $f^{-1}(q)$ è una $(m-n)$ varietà il cui bordo è dato da $f^{-1}(q) \cap M$*

Dimostrazione: Sia $Z = f^{-1}(q)$ e $g = f_{|\partial M} : \partial M \to N$. sia $z \in Z$. Se $z \notin \partial M$, allora $z \in M - \partial M$ che è una n varietà senza bordo aperta in M e posso applicare il teorema del caso senza bordo per trovare un aperto $U \subseteq Z$ in $M - \partial M$ (dunque in M) diffeomorfo a un aperto di $\mathbb{R}^{m-n}$. Sia ora $x \in \partial M$. Posso supporre che ∂M sia H^m e che $z \in \partial H^m$. Per definizione di mappa C^∞, f si estende a $F : \Omega \to N$, dove $z \in \Omega$ e Ω è aperto di $\mathbb{R}^m$. Adesso $dF_z = df_z$ e dunque si ha ancora la suriettività del differenziale. A meno di restringere Ω posso assumere che dF sia suriettivo su tutto quanto Ω e dunque $F^{-1}(q)$ è una $(m-n)$ varietà deltro Ω. Un intorno di z in $f^{-1}(q)$ è dato da $F^{-1}(q) \cap \{x_m \geq 0\} = F^{-1}(q) \cap x_m^{-1}([0, +\infty))$. Questa è una varietà se 0 è un valore regolare per la funzione x_m: se lo fosse avremmo finito perché ho trovato una $(m-n)$ varietà con bordo esattamente $F^{-1}(q) \cap x_m^{-1}(0)$. Dimostriamo dunque che data $x_m : F^{-1}(q) \to \mathbb{R}$, 0 è un valore regolare; studiamo il differenziale di x_m: $(dx_m)_z : T_z(F^{-1}(q)) \to \mathbb{R}$. Mi chiedo chi è il *ker* di questa mappa e che dimensione ha: $ker(dx_m)_z = T_z(F^{-1}(q)) \cap ker(dx_m) : \mathbb{R}^m \to R = T_z(F^{-1}(q)) \cap x_m = 0 = ker(dF_z) \cap T_z(\partial M)$ =per definizione= $ker(dF_{|\partial M})_z = ker(dg_{|z})_z$ che, poiché q è regolare per g, ha dimensione $dim \partial M - dim N = m - n - 1$. Dunque vale che $dim(ker dx_m)_z = m - n - 1$ e perciò il differenziale è suriettivo e 0 è un valore regolare.

Esempio: Sia $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ tale che $f(x) = \|x\|^2$. Come già osservato, 1 è un valore regolare per f e dunque il disco chiuso $D^N = \{x \in \mathbb{R}^N | \|x\|^2 \leq 1\} = f^{-1}((-\infty, 1])$ è una varietà con bordo.

Definizione 4.4 *Sia M una n-varietà; un sottoinsieme $Z \subseteq M$ ha* ***misura nulla*** *se per ogni carta $\varphi : U \to \Omega$, $\varphi(Z \cap U)$ ha misura di Lebesgue nulla in $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$*

Osservazione:

1. Se Z è di misura nulla, allora $M - Z$ è denso;
2. Mappe C^∞ tra aperti di $\mathbb{R}^n$ mandano insiemi di misura nulla in insiemi di misura nulla. Dunque Z ha misura nulla se e solo se ha misura nulla negli aperti di un atlante a scelta (si dice che i cambi di carta sono **inessenziali**)

Teorema 4.0.9 (Lemma di Sard) *Sia $f : M \to N$ tra varietà. Allora l'insieme dei valori critici di f ha misura nulla in N*

Teorema 4.0.10 (Classificazione delle 1-varietà (no dim)) *Sia M una 1-varietà con connessa. Allora M è diffeomorfa a una delle seguenti:*
(1) $\mathbb{R} \cong (0, 1)$
(2) $[0, +\infty) \cong [0, 1)$
(3) $[0, 1]$
(4) S^1

Corollario 4.0.11 *Sia N una 1-varietà compatta, allora N è unione finita di copie di S^1 e di $[0, 1]$.*

Dimostrazione: Semplice applicazione del teorema precedente

Teorema 4.0.12 (di non retrazione) *Sia M una varietà compatta con bordo, allora non esiste $r : M \to \partial M$ funzione C^∞ tale che $r(x) = x$ per ogni $x \in \partial M$*

Dimostrazione: Supponiamo che la retrazione $r : M \to \partial M$ esista e sia $y \in \partial M$ un valore regolare (esiste per il lemma di Sard). y è regolare anche per $r_{|\partial M} = id_{|\partial M}$. Possiamo quindi applicare il teorema per la creazione di varietà con bordo: ne segue che $r^{-1}(y) = N$ è una 1- varietà in quanto $1 = dimM - dim\partial M$. Inoltre $\partial N = r^{-1}(y) \cap \partial M = \{p \in \partial M | r(p) = y\} = \{y\}$ perché r ristretto al bordo è l'identità. Adesso M è compatta e quindi N è compatta e dunque N è unione di copie di S^1 e $[0, 1]$ e ha perciò un numero pari di punti appartenenti al bordo. Assurdo in quanto il bordo è formato da solo un punto

Teorema 4.0.13 (del punto fisso di Browuer) *Sia $D^n = \{x \in \mathbb{R}^n | \|x\| \leq 1\}$ e sia $f : D^n \to D^n$ una funzione continua. Allora esiste $x \in D^n$ tale che $f(x) = x$*

Dimostrazione: Supponiamo che f sia una funzione C^∞ e supponiamo per assurdo che $f(x) \neq x$ per ogni $x \in D^n$. Sotto l'ipotesi di assurdo costruisco una retrazione $r : D^n \to \partial D^n = S^{n-1}$ in questo modo: $r(x)$ è l'intersezione di S^{n-1} con la semiretta uscente da $f(x)$ che passa per x. Si osserva che la funzione $r(x)$ è C^∞: infatti $r(x) = f(x) + t(x)(x - f(x))$ intersecato con il bordo del disco e se mostriamo che $t(x)$ è C^∞ ho vinto. La condizione $\|r(x)\| = 1 \Rightarrow 1 = \|f(x) + t(x)(x - f(x))\| \Leftrightarrow 1 = \|f(x)\|^2 + 2t(x) < f(x), x - f(x) > +t(x)^2\|x - f(x)\|^2$. Questa equazione di secondo grado in $t(x)$ ha una soluzione positiva che dipende in maniera C^∞ da $x, f(x)$ e dunque da x (per vederlo bene si deve svolgere il conto). Dunque r è una funzione C^∞ e contraddice il teorema di non retrazione. Ciò mostra che f ha almeno un punto fisso.
Abbiamo mostrato il teorema per funzioni C^∞. Supponiamo adesso che f sia solamente C^0. Dico che $\forall\varepsilon\ \exists g : D^n \to D^n\ C^\infty$ con $\|g(x) - f(x)\| \leq \varepsilon, \forall x \in D^n$: infatti, applicando il teorema di Stone-Weierstrass (vedere cosa dice bene) alle componenti di f , trovo una $g' : D^n \to \mathbb{R}^n$ tale che $\|g'(x) - f(x)\| \leq \frac{\varepsilon}{3}$ per ogni $x \in D^n$. Poniamo adesso $g(x) = \frac{g'(x)}{1+\frac{\varepsilon}{3}}$ (poiché $g'(x)$ non è molto lontana da $f(x)$): $\|g(x)\| = \|\frac{g'(x)}{1+\frac{\varepsilon}{3}}\| = \frac{\|g'(x)\|}{1+\frac{\varepsilon}{3}} \leq \frac{\|f(x)\|+\frac{\varepsilon}{3}}{1+\frac{\varepsilon}{3}} \leq 1$; allora $g(x) : D^n \to D^n$ e inoltre vale che, stimando la differenza tra $g(x)$ e $f(x)$: $\|g(x) - f(x)\| \leq \|g(x) - g'(x)\| + \|g'(x) - f(x)\| \leq \|g'(x)(1 - \frac{1}{1+\frac{\varepsilon}{3}})\| + \frac{\varepsilon}{3} = \frac{\|g'(x)\|\frac{\varepsilon}{3}}{1+\frac{\varepsilon}{3}} + \frac{\varepsilon}{3} \leq \frac{2\varepsilon}{3} < \varepsilon$. Supponiamo adesso che $f(x) \neq x$ per ogni $x \in D^n$. La mappa da $D^n \to \mathbb{R}$ tale che $x \mapsto \|x - f(x)\|$ è continua e per Weierstrass ammette minimo $\varepsilon > 0$ (D^n è compatto e f non ha punti fissi): l'idea è di arrivare a costruire una mappa C^∞ senza punti fissi a partire da quella C^0). Considero adesso $g : D^n \to D^n$ tale che $\|f(x) - g(x)\| \leq \frac{\varepsilon}{3}$ (lo posso fare per quanto visto). Adesso $\|g(x) - x\| \geq \|f(x) - x\| - \|g(x) - f(x)\| \geq \varepsilon - \frac{\varepsilon}{3} \geq \frac{2}{3}\varepsilon > \varepsilon$. Dunque g non ha punti fissi e questo è assurdo.

Osservazione: Il semispazio H^n si retrae sul suo bordo ∂H^n: perciò l'ipotesi di compattezza per il teorema di non retrazione è fondamentale

Definizione 4.5 *Siano M, N varietà, $f, g : M \to N$. Un'**omotopia** tra f e g è una mappa H C^∞, $H : M \times [0, 1] \to N$ tale che $H(x, 0) = f(x)$, $H(x, 1) = g(x)$ per ogni $x \in M$. Se una tale H esiste, f e g si dicono **omotope**.*

Definizione 4.6 *Siano f e g embedding, H si dice **isotopia di embedding** tra f e g se $H(\cdot, t) : M \to N$ è un embedding per ogni $t \in [0, 1]$ e $H(x, 0) = f(x)$, $H(x, 1) = g(x)$. f, g si dicono **isotope**.*
*Se sostituiamo la parola embedding con la parola diffeomorfismo otteniamo una definizione analoga per **isotopia di diffeomorfismo***

Osservazione: Se M è una varietà senza bordo, $M \times [0,1]$ è una varietà con bordo data da $M \times \{0\} \cup M \times \{1\}$. Se M è orientata, anche $M \times [0,1]$ lo è ($\forall (x,t) \in M \times [0,1]$ una base positiva di $T_{(x,t)}(M \times [0,1])$ è data da $(di_x(v_1), ..., di_x(v_n), dj(1))$ dove $v_1, ..., v_n$ è base positiva di $T_x(M), 1$ è base positiva di $T_t([0,1])$ e anche $i : M \to M \times [0,1]$ e $j : [0,1] \to M \times [0,1]$ inclusioni naturali).

Osservazione: Se fissiamo su M la sua orientazione e dotiamo con $M \times \{0\}$ e $M \times \{1\}$ dell'orientazione indotta da M, allora le inclusioni $i_0 : M \to M \times \{1\}$ e $i_1 : M \to M \times \{1\}$ sono diffeomorfismi di segno opposto (uno preserva l'orientazione, l'altro no). Ciò accade perché il vettore $dj(1)$ è entrante nei punti di $M \times \{0\}$ e uscente in $M \times \{1\}$.

Osservazione: Omotopia e isotopia (di vario genere) sono relazioni di equivalenza:

Riflessiva: $f \sim f$ tramite $H(x,t) = f(x)$

Simmetrica: $f \sim g \Rightarrow g \sim f$ e si usa $H'(x,t) = H(x, 1-t)$ dove H è omotopia tra f e g.

Transitiva: $f \sim g$, $g \sim h$ allora $f \sim h$: infatti giustapponendo due omotopie C^∞ si ottiene una omotopia solamente C^0. Però, se $f \sim g$, c'è anche una omotopia H tale che $H(x,t) = f(x)$ per ogni $t \in [0, \varepsilon)$ e $H(x,t) = g(x)$ per ogni $t \in (1-\varepsilon, 1]$. Infatti, data una omotopia generica H' pongo $H(x,t) = H'(x, \varphi(t))$, dove $\varphi : [0,1] \to [0,1]$ è C^∞ e $\varphi(t) = 0$ per ogni $t \in [0, \varepsilon), \varphi(t) = 1$ per ogni $t \in (1-\varepsilon, 1]$. Queste omotopie si raccordano in modo C^∞ e questo mostra la transitività.

Osservazione: Sia $f : M \to \mathbb{R}^n$ funzione C^∞. Allora f è omotopa alla costante $g(x) = 0$ per ogni $x \in M$ tramite $H(x,t) = (1-t)f(x)$. In particolare le mappe $Id, r : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ dove $r(x_1, ..., x_n) = (-x_1, x_2, ..., x_n)$ sono omotope. Però le due mappe non sono isotope poiché se lo fossero, cioè se $H(x,t)$ fosse una isotopia tra Id e r avrei ad esempio che, posto $\varphi_t(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ con $\varphi_t(x) = H(x,t)$ allora deve valere che $\varphi_t(x)$ è diffeomorfismo per ogni t, per cui il Jacobiano di $\varphi_t(x)$ ha determinante diverso da 0 per ogni t. Ma la funzione determinante è continua e vale 1 nell'identità ($\varphi_0(x) = id$) e -1 nella riflessione ($r = \varphi_1(x)$). Dunque esiste un punto in cui il determinante di annulla e questo e assurdo.

Lemma 4.0.14 *Sia n fissato, allora esiste un intorno $U \subseteq \mathbb{R}^n$ intorno dell'origine tale che $\forall p \in U$ esiste un diffeomorfismo $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tale che $\varphi(0) = 0$ e φ sia isotopo all'identità tramite una isotopia $H : \mathbb{R}^n \times [0,1] \to \mathbb{R}^n$ tale che $H(x,t) = x$ per ogni x tale che $\|x\| \geq 1$ (in particolare $\varphi(x) = x$ per ogni x tale che $\|x\| \geq 1$)*

Dimostrazione: Facciamo il caso $n = 1$. Scegliamo una $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $\varphi(0) = 1$ e $\varphi(x) = 0$ per ogni x tale che $\|x\| \geq \frac{1}{2}$ e poniamo $M = max\{|\varphi'(x)|\}$ che esiste perché φ è a supporto compatto. Poniamo $U = (-\frac{1}{M}, \frac{1}{M})$ e dato $p \in U$ poniamo $H(x,t) = x + t\varphi(x)p$. Osserviamo che $H(x,0) = x$ e $H(0,1) = p$. Se adesso $\|x\| \geq 1$, allora $\varphi(x) = 0$ e dunque $H(x,t) = x$ (fuori dal cerchio di raggio $\frac{1}{2}$ è l'identità). Dobbiamo adesso solo mostrare che $\varphi_t(x) = H(\cdot, t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è un diffeomorfismo per ogni t. $\varphi_t(x)' = \frac{d}{dx}(x + t\varphi(x)p) = 1 + t\varphi'(x)p > 0$ per ogni x in quanto $|t\varphi'(x)p| \leq |t||\varphi'(x)||p| \leq 1M|p| < 1$. Poiché $\lim_{x \to \pm\infty} \varphi_t(x) = \pm\infty$ e $\varphi_t'(x) > 0$ su $\mathbb{R}$, allora φ_t è un diffeomorfismo e ciò conclude la dimostrazione nel caso $n = 1$

Nel caso $n \geq 2$, sia $\delta : \mathbb{R}^{n-1} \to [0,1]$ con $\delta(0) = 1, \delta(x) = 0$ se $\|x\| geq \frac{1}{2}$. A meno di coniugare con una retrazione, posso porre $p = (p_0, 0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1}$ e scelgo $U = B(0, \frac{1}{M})$ con $p_0 \in (-\frac{1}{M}, \frac{1}{M})$. Dato $(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1}$ pongo $H((x,y),t) = (x + t\varphi(x)\delta(y)p_0, y)$ che è una funzione C^∞ (φ è definita come sopra). Devo mostrare che è un diffeomorfismo e che fissa l'esterno. Se $(x,y) \notin D^n$, allora $|x| \geq \frac{1}{2}$ e $\|y\| \geq \frac{1}{2}$ e dunque $\varphi(x)\delta(y) = 0$ e $H((x,y),t) = (x,y)$ per ogni t. Vale anche ovviamente che $H((0,0),1) = (0 + p_0, 0) = p$. Ci manca solo da mostrare che $\psi_t = H(\cdot, t) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è diffeomorfismo. Ci basta far vedere che è un diffeomorfismo locale bigettivo. Il jacobiano di ψ_t è:

$$\begin{bmatrix} 1 + t\varphi'(x)\delta(y)p_0 & * & ... & * \\ 0 & & & \\ \vdots & & Id & \\ 0 & & & \end{bmatrix}$$

Il termine $1 + t\varphi'(x)\delta(y)p_0$ è maggiore di 0 per le stesse considerazioni del caso $n = 1$ dunque il determinante del Jacobiano è maggiore di 0 e ψ_t è un diffeomorfismo locale. Dobbiamo mostrare la bigettività: per ogni $y_0 \in \mathbb{R}^{n-1}$, ψ_t si restringe a un diffeomorfismo di $\mathbb{R} \times \{y_0\}$ in se stesso, da cui la bigettività locale e quindi globale.

Lemma 4.0.15 (Lemma di Omogeneità) *Sia M una varietà connessa, allora per ogni $p, q \in M$ esiste un diffeomorfismo isotopo all'identità (che porta p in q) $\varphi : M \to M$ tale che $\varphi(p) = q$.*

Dimostrazione: Per ogni $p \in M$ sia $\Omega_p = \{\text{punti } q \in M \text{ per cui esiste } \varphi \text{ come nell'enunciato}\}$. Utilizziamo il lemma precedente per dimostrare che Ω_p è aperto: dato $q \in \Omega_p$ prendo una carta $\psi : V \to \mathbb{R}^n$, $\psi(q) = 0$ con V intorno di q (dimostrare per esercizio che esiste sempre tale carta). Se adesso $W = \psi^{-1}(U)$ dove U è l'intorno dell'origine del lemma precedente. W è un aperto che contiene q dunque è sufficiente mostrare che $W \subseteq \Omega_p$. $\forall q' \in W$, per il lemma precedente, $\exists \alpha : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ isotopo all'identità con isotopia costante fuori dal disco unitario e tale che $\alpha(\psi(q)) = \alpha(0) = \psi(q')$. Pongo

$$\beta : M \to M \quad \beta(x) = \begin{cases} \psi^{-1}(\alpha(\psi(x)) & x \in V \\ x & x \in M - (\psi^{-1}(D^n)) \end{cases}$$

β è un diffeomorfismo ben definito isotopo all'identità e tale che $\beta(q) = q'$. Poiché $q \in \Omega_p, \exists \gamma : M \to M$ isotopo all'identità con $\gamma(p) = q$; adesso $\beta \circ \gamma : M \to M$ è isotopo all'identità (mostrare per esercizio) ed è tale che $\beta \circ \gamma(p) = \beta(q) = q'$. Dunque $q' \in \Omega_p$ e perciò $W \in \Omega_p$ che quindi risulta essere aperto. Adesso, al variare di $p \in M$, gli Ω_p danno una partizione di M in aperti (dunque un Ω_p è anche chiuso perché complementare dell'unione di tutti gli altri). Dunque $\Omega_p = M$ e si ha la tesi.

Mettiamoci adesso in delle ipotesi che ci accompagneranno per tutta la parte sul grado: siano M, N varietà della stessa dimensione, orientate, M compatta, N connessa: allora

Definizione 4.7 *Sia $f : M \to N$ come sopra e sia y un valore regolare per f; allora il* ***grado intero di** f **rispetto a*** *y è il numero $deg(f, y) = \sum_{x \in f^{-1}(y)} \varepsilon(df_x)$ dove $\varepsilon(df_x) = \pm 1$ a seconda che df_x preservi o inverta l'orientazione.*

OSSERVAZIONE: Se M è compatta e y è regolare, allora la somma è finita e dunque $deg(f, y)$ è ben definito

OSSERVAZIONE: Se $R \subseteq Y$ è l'insieme dei valori regolari, allora R è aperto e $f_{|f^{-1}(R)}$ è un "rivestimento" (solo esistenza di intorni ben rivestiti: non si chiede la connessione o la suriettività) e dunque $deg(f, y)$ è localmente costante in y, cioè $deg(f, y) = deg(f, z)$ per ogni z nella stessa componente connessa di $y \in R$.

Dimostreremo fra poco che $deg(f, y) = deg(f)$ (cioè non dipende da $y \in R$ che comunque esistono sempre per il lemma di Sard) e che $deg(f)$ dipende solo dalla classe di omotopia di f.

Teorema 4.0.16 *Sia $f : M \to N$ come soprae sia $y \in N$ un valore regolare per f; supponiamo che $M = \partial X$ orientata dove X è orientata, supponiamo X compatta e $n + 1$ dimensionale e $f = F|_{\partial X}$ con $F : X \to N$ C^∞. Allora $deg(f, y) = 0$*

Dimostrazione: Poiché $deg(f, y)$ è localmente costante in y e i valori regolari per f sono densi in N, posso supporre y regolare per F maiuscolo (sto in realtà prendendo un punto in un intorno di y e o richiamo y per semplicità). Usando un teorema già mostrato, $F^{-1}(y) = Z$ è una $1-$varietà in X. A questo punto X è compatta e dunque Z è unione finita di archi e di cerchi. $f^{-1}(y) = \partial X \cap F^{-1}(y) = \{z \in F^{-1}(y) \cap \partial X\} = \partial Z$. Dunque i punti che contribuiscono a $deg(f, y)$ sono gli estremi degli archi e se $\gamma : [0, 1] \to Z$ è un diffeomorfismo tra $[0, 1]$ e uno di questi archi, basta mostrare che $\varepsilon(df_{\gamma(0)}) = \varepsilon(df_{\gamma(1)})$. Vogliamo mostrare che γ da orientazioni diverse in partenza e in arrivo. Orientiamo $\gamma([0, 1]) = Z_0$. Un vettore $v \in T_z(Z_0)$ è positivo se, completato v a base $(v, v_1, ..., v_n)$ positiva di $T_z(X)$, allora $(dF_z(v_1), ..., dF_z(v_n))$ è base positiva di $T_y(N)$. ($F_{|Z_0}$ =costante, perciò $dF_z(v) = 0$ perciò $dF_z : T_z(X) \to T_y(N)$ è suriettiva e dunque $(dF_z(v_1), ..., dF_z(v_n))$ è base di $T_y(N)$). A meno di scambiare γ con $\bar{\gamma} = \gamma(1-t)$ posso supporre che γ preservi l'orientazione. Sia $v_1, ..., v_n$ una base positiva di $T_{\gamma(0)}(X)$, dunque per le convenzioni scelte $df_{\gamma(0)}(v_1), ..., df_{\gamma(0)}(v_n))$ è una base negativa di $T_y(N)$ e $\varepsilon(df_{\gamma(0)}) = -1$. Se $v_1, ..., v_n$ è base positiva di $T_{\gamma(1)}(M)$, allora $\gamma'(1)$ crescente implica che $\gamma'(1), v_1, ..., v_n$ è base positiva di $T_{\gamma(1)}(X)$, allora $df_{\gamma(1)}(v_1), ..., df_{\gamma(1)}(v_n)$ è base positiva di $T_y(N)$ e $\varepsilon(df_{\gamma(1)}) = 1$ e dunque la tesi.

Corollario 4.0.17 *Siano $f, g : M \to N$ come sopra e siano omotope. Se y è regolare sia per f che per g, allora $deg(f, y) = deg(g, y)$*

Dimostrazione: Basta applicare il teorema precedente a $F : M \times [0, 1] \to N$ omotopia tra f e g ottenendo $0 = deg(F|_{\partial M\times[0,1]}, y) = deg(F_{M\times\{0\}}, y) + deg(F_{|M\times\{1\}}, y) = \pm(deg(f, y) - deg(g, y))$ poiché le inclusioni $i_0 : M \to M \times \{0\}$ e $i_1 : M \to M \times \{1\}$ hanno segno opposto e dunque la tesi.

Osservazione: abbiamo usato anche che, data $f : M \to N$, se cambio l'orientazione di M, allora $deg(f, y)$ cambia segno (vale anche se cambio orientazione di N con quella opposta).

Proposizione 4.0.18 *Sia $f : M \to N$ tra varietà, $dimM = dimN$ orientata, M compatta, N connessa. Se y_1 e y_2 sono valori regolari per f, allora $deg(f, y_1) = deg(f, y_2)$ e dunque è ben definito $deg(f) = deg(f, y_1)$.*

Dimostrazione: Per il lemma di omogeneità (N è connessa), esiste un diffeomorfismo $\varphi : N \to N$ isotopo all'identità tale che $\varphi(y_1) = y_2$. Essendo isotopo all'identità, φ preserva l'orientazione di N (esercizio) in ogni punto. Inoltre abbiamo che f è omotopa a $\varphi \circ f$ in quanto φ è isotopo all'identità. Per invarianza omotopica del grado, ho che $deg(f, y_2) = deg(\varphi \circ f, y_2)$: ciò ha senso perché y_2 è regolare anche per $\varphi\circ f$, infatti $(\varphi\circ f)^{-1}(y_2) = f^{-1}(\varphi^{-1}(y_2)) = f^{-1}(y_1)$ e $\forall x \in f^{-1}(y_1)$, poiché y_1 è regolare per f, df_x è invertibile, ma allora $d(\varphi \circ f)_x = d\varphi_{y_1} \circ df_x$ è invertibile. Dunque y_2 è regolare per $varphi \circ f$. Inoltre per ogni $x \in f^{-1}(y_1)$ vale che $\varepsilon(df_x) = \varepsilon(d(\varphi \circ f)_x)$ in quanto $d\varphi_{y_1}$ preserva l'orientazione. Dunque

$$deg(f, y_1) = \sum_{x\in f^{-1}(y_1)} \varepsilon(df_x) = \sum_{x\in(\varphi\circ f)^{-1}(y_2)} \varepsilon(d(\varphi \circ f)_x) = deg(\varphi \circ f, y_2) = deg(f, y_2)$$

Corollario 4.0.19 *Se f è omotopa a g, allora $deg(f) = deg(g)$.*

Dimostrazione: Per il lemma di Sard esiste sempre un valore regolare sia per f che per g e dunque la tesi.

Osservazione: Se f non è suriettiva, scegliendo $y \in N - f(M)$ ottengo $deg(f) = 0$

Osservazione: Se f è un diffeomorfismo, $deg(f) = \pm1$ a seconda che preservi o inverta l'orientazione.

Osservazione: Se f è omotopa a un diffeomorfismo, allora f è suriettiva.

Osservazione: Considerando S^1 come sottoinsieme di $\mathbb{C}$, la funzione $f : S^1 \to S^1$ $z \mapsto z^n$ ha grado n per ogni $n \in \mathbb{Z}$; infatti: $f(e^{i\theta}) = e^{in\theta}$ e $f^{-1}(1) = \{e^{\frac{2\pi ik}{n}} | k = 0, ..., n - 1\}$ è l'insieme delle radici $n-$esime dell'identità e ha cardinalità n. Identificando df con f' abbiamo che $f' = nz^{n-1}$ e un generatore positivo di $T_{e^{\frac{2\pi ki}{n}}}(S^1)$ è $ie^{\frac{2\pi ki}{n}}$, la cui immagine tramite df è $n(e^{\frac{2\pi ki}{n}})^{n-1}ie^{\frac{2\pi ki}{n}} = in$. Se adesso n è positivo, in è un feneratore positivo di $T_1(S^1)$, per cui $\varepsilon(df_{e^{\frac{2\pi ki}{n}}}) = 1$ e $deg(f) = deg(f,1) = n$. Se $n < 0$, in è negativo e dunque $deg(f) = n$.

OSSERVAZIONE: $\forall d$ esiste $f : S^n \to S^n$ di grado d. Si procede per induzione su n. L'idea è che f si restringe alla funzione $z \mapsto z^d$ su ciascun parallelo di dimensione $n-1$. La mappa ha grado d perché il tangente è formato dal vettore individuato prima e dall'identità. (commentare un po')

Proposizione 4.0.20 *Siano $f : M \to N$ e $g : N \to Z$ mappe tra varietà orientate, compatte connesse. Allora $deg(g \circ f) = degg \cdot degf$.*

Dimostrazione: Sia $z \in Z$ regolare sia per g che per f (esiste per il lemma di Sard). Allora: $deg(g \circ f) = \sum_{x \in f^{-1}(g^{-1}(z))} \varepsilon(d(g \circ f)_x) = \sum_{y \in g^{-1}(z)} (\sum_{x \in f^{-1}(y)} \varepsilon(dg_y)\varepsilon(df_x)) =$ dunque ciascun y è regolare per $f = \sum_{y \in g^{-1}(z)} \varepsilon(dg_y)(\sum_{x \in f^{-1}(y)} \varepsilon(df_x)) = \sum_{y \in g^{-1}(z)} \varepsilon(dg_y) \cdot deg(f) = deg(f) \cdot deg(g)$.

Proposizione 4.0.21 *Sia $r : S^n \to S^n$ una riflessione rispetto a un iperpiano coordinato. Allora $deg(r) = -1$*

Dimostrazione: $r \circ r = id \Rightarrow r$ è diffeomorfismo e basta vedere che inverte l'orientazione. Se $r(x_1, ..., x_{n+1}) = (-x_1, x_2, ..., x_{n+1})$ prendiamo $p = (0, 1, 0, ..., 0) \in S^n$. $p = e_2$, $T_p(S^n) = e_2^{\perp} = span(e_1, e_3, ..., e_{n+1})$ e $dr : T_p(S^n) \to T_p(S^n)$ e la restrizione $r_{|T_p(S^n)}$ vale $r(e_1) = -e_1$ e $r(e_j) = e_j$ per ogni $j > 2$. Dunque rispetto alla base $e_1, e_3, ..., e_{n+1}$ di $T_p(S^n)$ il differenziale dr è rappresentato da $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & Id \end{bmatrix}$ per cui $\varepsilon(dr_p) = -1$

Definizione 4.8 *Definiamo* ***mappa antipodale*** *la mappa $A : S^n \to S^n$, $A = -Id$, cioè $A(p) = -p$ per ogni p. é una mappa C^∞ ed è un diffeomorfismo.*

Proposizione 4.0.22 *Sia $A : S^n \to S^n$ la mappa antipodale; allora $deg(A) = (-1)^{n+1}$*

Dimostrazione: La mappa antipodale è $A = r_1 \circ ... \circ r_{n+1}$ dove $r_i(x_1, ..., x_i, ..., x_{n+1}) = (x_1, ..., -x_i, ..., x_{n+1})$. Dunque $deg(A) = \prod_{i=1}^{n+1} deg(r_i) = (-1)^{n+1}$.

Teorema 4.0.23 *Sono fatti equivalenti:*

1. *S^n è pettinabile;*
2. *n è un numero dispari;*
3. *$A : S^n \to S^n$ è omotopa all'identità.*

Dimostrazione: $(2 \Rightarrow 1)$Definiamo $v : S^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ tale che $v(x_1, ..., x_{n+1}) = (-x_2, x_1, -x_4, x_3, ..., -x_{n+1}, x_n)$. v è una funzione C^∞, $v(p) \neq 0$ per ogni $p \in S^n$ e soprattutto $< v(p), p >= 0$ per ogni p, che vuol dire che $v(p) \in T_p(S^n) = p^\perp$
$(1 \Rightarrow 3)$Normalizzando il campo, posso supporre di avere un campo tangente $v : S^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ unitario. Poniamo adesso $H : S^n \times [0, 1] \to S^n$ come $H(p, t) = (\cos(\pi t)p + \sin(\pi t)v(p))$. H è una buona omotopia: $H(p, 0) = p$ e $H(p, 1) = -p$ per ogni $p \in S^n$. Inoltre la mappa è ben definita infatti $\|H(p, t)\| = \cos^2(\pi t)\|p\|^2 + \sin^2(\pi t)\|v(p)\|^2 + < p, v(p) >= 1$ e dunque è a valori in S^n.
$(3 \Rightarrow 2)$Se A è omotopa all'identità, allora $1 = deg(Id) = deg(A) = (-1)^{n+1}$ e dunque n deve essere dispari.

Esercizio 4.0.3 *Se n è pari e $f : S^n \to S^n$, allora $\exists p \in S^n$ tale che $f(p) = p$ oppure $f(p) = -p$. (Questo fatto implica che la f che passa al proiettivo $f : \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^n$ ha sempre un punto fisso.*

capisci che è una domanda da esame, solo sketch: Se f non ha punti fissi significa essere omotopi all'antipodale; se ha punti fissi è omotopo all'identità. Altrimenti prendo $p - f(p)$ e costruisco $v(p)$ trovando che n è dispari.

FATTO: Sia $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ con $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ dominio **stellato** rispetto a 0: $f(0) = 0$ e f C^∞ allora esistono $g_1, ..., g_n : \Omega \to \mathbb{R}^n$ lisce tale che $f(x_1, ..., x_n) = \sum_{i=1}^n x_i g_i(x_1, ..., x_n)$ e $g_i(0) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(0)$. Basta dimostrare l'analoga formula per $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (per cui $g_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, la dimostriamo cioè componente per componente). Allora

$$f(x_1, ..., x_n) = \int_0^1 \frac{d}{dt} f(tx_1, ..., tx_n)dt = \int_0^1 \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx_1, ..., tx_n)dt = \sum_{i=1}^n x_i \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx_1, ..., tx_n)dt$$

(dove la prima uguaglianza funziona poiché il dominio è stellato) e ponendo adesso $\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx_1, ..., tx_n)dt = g_i(x)$ si ha la tesi.

Proposizione 4.0.24 *Sia $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ embedding, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto stellato rispetto a 0. Allora f è isotopo all'identità o a una riflessione. Assumiamo inoltre $f(0) = 0$: allora l'omotopia fissa 0 in ogni istante.*

Dimostrazione: Costruiamo una isotopia tra f e df_0 ponendo

$$H(p,t) = \begin{cases} df_0(p) & t = 0 \\ \frac{f(tp)}{t} & t > 0 \end{cases}$$

Vale che $H(p, 0) = df_0$ e $H(p, 1) = f$. Si osserva facilmente che $H(\cdot, t)$ è embedding per ogni t, e notiamo anche che H è C^∞ dovunque tranne in al più in $\Omega \times \{0\}$. Per la liscezza totale di H si usa il lemma precedente osservando che

$$H(p,t) = (\frac{f(tp)}{t}) = \sum_{i=1}^n \frac{tx_i g_i(tx_1, ..., tx_n)}{t} = \sum_{i=1}^n g_i(tx_1, ..., tx_n)$$

che tende a df_0 per $t \to 0$. Abbiamo costruito una isotopia tra f e df_0 costante in 0. $df_0 \in GL(n, \mathbb{R})$ ha due componenti connesse per archi che contengono rispettivamente l'identità e una riflessione. Un arco C^∞ in $GL(n, \mathbb{R})$ è una isotopia tra i suoi estremi, da cui, componendo le isotopie, si ha la tesi.

4.1 Indice di zeri isolati di campi vettoriali

Definizione 4.9 *Sia $v \in \mathcal{T}(M)$ un campo vettoriale su M; $p \in M$ si dice* ***zero isolato di*** *v se esiste un intorno U di p in M con $v(p) = 0$ e $v(q) \neq 0$ per ogni $q \in U - \{p\}$*

Definizione 4.10 *Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, $v \in \mathcal{T}(\Omega)$ e p zero isolato su Ω. Sia $\overline{B(p, \varepsilon)} \subseteq \Omega$ di centro p e tale che p sia l'unico zero di v su $B(p, \varepsilon)$. Sia $\bar{(v)} = \frac{v}{\|v\|} : \partial B(p, \varepsilon) \to S^{n-1}$. Orientiamo $\partial B(p, \varepsilon)$ come il bordo di $B(p, \varepsilon)$, S^{n-1} come ∂D^n e poniamo l'**indice di** p **su** v come $i_p(v) = deg(\bar{v})$*

Mostriamo che $i_p(v)$ è ben definito: sia ε' con le stesse proprieà di ε e supponiamo senza perdita di generalità che $\varepsilon' < \varepsilon$. Se $X = \overline{B(p, \varepsilon)} - int(B(p, \varepsilon'))$ posso definire $\bar{v} = \frac{v}{\|v\|} : X \to S^{n-1}$. Perciò (per il teorema di estensione a una varietà più grande) si ha $0 = deg \bar{v}_{|\partial X} = deg \bar{v}_{|\partial B(p,\varepsilon)} -$

$deg\bar{v}_{|\partial B(p,\varepsilon')}$ dove il $-$ deriva dal fatto che il bordo interno ha orientazione diversa. Un altro modo per verificare la buona definizione è quello di osservare che è possibile fare una omotopia tra la palla più grande e quella più piccola.

ESEMPIO: Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ e sia v un campo vettoriale tale che $v(z) = z^n$, e con $n \geq 1$ si ha uno zero isolato in 0. Si può porre $\varepsilon = 1$ e dunque $\|v\| = 1$ su S^1; per cui $\bar{v} = v$ e dunque $i_p(v) = deg(v) = n$ per quanto già osservato.

DISEGNI VARI SU CAMPI VETTORIALI E SULLE LINEE DI FLUSSO

Definizione 4.11 *Sia $\varphi : A \to B$ diffeomorfismi tra (aperti di) varietà; $v \in \mathcal{T}(A)$. Definiamo* ***pull-back*** *di v, $\varphi_*(v) \in \mathcal{T}(B)$ come segue: $\varphi_*(v)(q) = d\varphi_{|\varphi^{-1}(q)}(v(\varphi^{-1}(q)))$. In un certo senso vale che $\varphi_*(v) = d\varphi \circ v \circ \varphi^{-1}$.*

Proposizione 4.1.1 *Siano Ω e Ω' aperti di $\mathbb{R}^n$ con $0 \in \Omega$ e $0 \in \Omega'$, $\varphi : \Omega \to \Omega'$ diffeomorfismo con $\varphi(0) = 0$ e $v \in \mathcal{T}(\Omega)$ con 0 che è uno zero isolato di v. Allora $i_0(v) = i_0(\varphi_*(v))$.*

Dimostrazione: Gli zeri di $\varphi_*(v)$ sono esattamente le immagini degli zeri di v; dunque 0 è anche unozero isolato di $\varphi_*(v)$. Sappiamo che esiste una isotopia di embedding (diffeomorfismi sull'immagine) $H : \Omega \times I \to \mathbb{R}^n$ con $H(\cdot, 0) = \varphi$, $H(\cdot, 1) = Id$ o r con r riflessione e $H(0, t) = 0$ per ogni $t \in [0, 1]$. Per ogni t considero il campo vettoriale $(\varphi_t)_*(v)$ su Ω_t dove $\varphi_t = H(\cdot, t)$ e $\Omega_t = \varphi_t(\Omega)$. L'origine è uno zero isolato per $(\varphi_t)_*(v)$ per ogni t. Per compattezza di $[0, 1]$, $\exists \varepsilon > 0$ tale che $B(0, \varepsilon) \subseteq \Omega_t$ per ogni t e l'origine appartiene a $B(0, \varepsilon)$ ed è l'unico 0 di $(\varphi_t)_*(v)$ su $B(0, \varepsilon)$. Poniamo adesso $\bar{v}_t = \frac{(\varphi_t)_*(v)}{\|(\varphi_t)_*(v)\|} : \partial B(0, \varepsilon) \to S^{n-1}$ e troviamo una omotopia $K : \partial B(0, \varepsilon) \times [0, 1] \to S^{n-1}$ e $K(q, t) = \bar{v}_t(q)$ e dunque $deg\bar{v}_0 = deg\bar{v}_1$. A questo punto vale quindi che $i_0(\varphi_*(v)) = i_0(v)$ oppure $i_0(\varphi_*(v)) = i_0(r_*(v))$ con r riflessione a seconda che φ preservi o meno l'orientazione. Nel primo caso si ha banalmente la tesi. Nel secondo caso $r_*(v) = dr \circ v \circ r^{-1}$. r è una riflessione, dunque è linere e dunque $dr = r$ e dunque $r_* = r \circ v \circ r^{-1}$; il cui normalizzato è $r \circ \bar{v} \circ r^{-1}$ poiché r è una isometria. Dunque $i_0(r_*(v)) = deg(\overline{r_*(v)}_{|\partial B(0,\varepsilon)}) = deg(r \circ \bar{v} \circ r^{-1}_{|\partial B(0,\varepsilon)}) = deg(r) \cdot deg(\bar{v}) \cdot deg(r^{-1}) = deg(\bar{v}_{|\partial B(0,\varepsilon)})$ che è la tesi.

Definizione 4.12 *Sia M una n-varietà, $v \in \mathcal{T}(M)$, $p \in M$ zero isolato di v. Definiamo* ***indice di*** *p il numero $i_p(v) = i_0(\varphi_*(v))$ dove $\varphi : U \to \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ è una carta con $\varphi(p) = 0$.*

La buona definizione, cioè l'indipendenza da φ, discende da quanto dimostrato nella proposizione precedente: se $\psi : U \to \Omega'$ è un'altra carta, $\psi_*(v) = (\psi\varphi^{-1})_*(\varphi_*(v))$. Questa ha lo stesso indice di $\psi_*(v)$ in 0 in quanto $\psi\varphi^{-1} : \Omega \to \Omega'$ è un diffeomorfismo (si è usato che $(fg)_* = f_* g_*$).

Lemma 4.1.2 *Sia $M \subseteq \mathbb{R}^n$, $v \in \mathcal{T}(M)$, $v(p) = 0$. Allora $dv_p(T_p(M)) \subseteq T_p(M)$ (Non è ovvio in quanto $v : M \to \mathbb{R}^N$)*

Dimostrazione: Prendiamo delle coordinate $u_1, ..., u_n$ vicino a p; dunque $v = \sum_{i=1}^n a_i x_{u_i}$ dove gli x_{u_i} sono il frame associato alle coordinate. Adesso per ogni i, $dv(x_{u_i})$ sta in $T_p(M)$ e vale che $dv(x_{u_i}) = \frac{\partial v}{\partial u_i} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial u_i}(a_j x_{u_j}) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial a_j}{\partial u_i} x_{u_j} + \sum_{j=1}^n a_j x_{u_i, u_j}$. Se adesso $v(p) = 0$ allora $a_j(p) = 0$ per ogni j e dunque $dv_p(x_{u_i}) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial a_j}{\partial u_i}(p) x_{u_j}(p) \in T_p(M)$ e la tesi segue poiché gli x_{u_i} generano $T_p(M)$.

Definizione 4.13 *p si dice* ***zero non degenere*** *di $v \in \mathcal{T}(M)$ se $dv_p : T_p(M) \to T_p(M)$ è un isomorfismo. In tal caso, poiché $dv_p : T_p(M) \to \mathbb{R}^N$ è iniettivo, v è iniettivo in un intorno di p e dunque p è uno zero isolato.*

Proposizione 4.1.3 *Sia p uno zero non degenere e $v \in \mathcal{T}(M)$. Allora $i_p(v) = \pm 1$ a seconda che $det(dv_p : T_p(M) \to T_p(M))$ sia positivo o negativo.*

Dimostrazione: Se $\varphi : U \to \Omega$ è una carta intorno a p, allora $i_p(v) = i_0(\varphi_*(v))$ e inoltre vale $d(\varphi_*(v))_0 = d\varphi_p \circ dv_p \circ d\varphi_0^{-1}$, per cui $det(dv_p) = det(d(\varphi_*(v))_0)$ (poiché il primo e il terzo membro della composizione sono uno l'inverso dell'altro). Dunque si può porre $M = \Omega$ aperto di $\mathbb{R}^n$ e $p = 0$ perché fatti i conti in aperti si posso riportare i risultati sulla varietà attraverso la carta. Dunque $v : \Omega \to \mathbb{R}^n$ ha differenziale in 0 che è un isomorfismo. Per cui, a meno di restringere Ω, v è un embedding ed è perciò isotopo all'identità se $det(dv_0) > 0$ o è isotopo a una riflessione se $det(dv_0) < 0$. Esattamente come prima, ciò implica che $i_0(v) = 1$ se $det(dv_0) > 0$ e $i_0(v) = -1$ se $det(dv_0) < 0$ in quanto da questa isotopia deduco una omotopia tra $\bar{v}$ e $W(x) = x$ (caso identità) oppure omotopia tra $\bar{v}$ e $W(x) = r(x)$ (caso riflessione).

Lemma 4.1.4 (di Hopf) *Sia $M \subsetneq \mathbb{R}^n$ una n-varietà con bordo compatta, cioè la chiusura di un aperto relativamente compatto, e sia $v \in \mathcal{T}(M)$ un campo tangente con zeri isolati e uscente da ∂M, cioè $p \in T_p(M) - C_p(M)$ per ogni $p \in \partial M$ (in particolare $v(p) \neq 0$ $\forall p \in \partial M$). Allora $\sum_{v(p)=0} i_p(v) = degN$ dove $N : \partial M \to S^{n-1}$ è la normale uscente.*

Dimostrazione: Gli zeri di v sono un insieme discreto, chiuso in un compatto, dunque sono in numero finito (e dunque il membro di sinistra dell'uguaglianza ha senso). Osserviamo che esiste $\varepsilon > 0$ tale che le palle $\overline{B(p, \varepsilon)}$ al variare di p sono a due a due disgiunte e contenute in $Int(M)$. Sia $X = M - \cup_{v(p)=0} B(p, \varepsilon)$: X è una n varietà con bordo orientata da R^n. Su X è ben definita la mappa $\bar{v} = \frac{v}{\|v\|} : X \to S^{n-1}$. Dunque per il solito teorema dell'estensione della varietà si ha $0 = deg(\bar{v}_{|\partial X})$. $\partial B(p, \varepsilon)$ è orientato in maniera opposta come bordo di $B(p, \varepsilon)$ e come bordo di X (se è entrante per uno, è uscente per l'altro), mentre il bordo di M eredita la stessa orientazione sia da M che da X. $0 = deg(\bar{v}_{|\partial M}) - \sum_{v(p)=0} deg(\bar{v}_{|\partial B(p,\varepsilon)}) = deg(\bar{v}_{|\partial M}) - \sum_{v(p)=0} i_p(v)$. Per concludere è sufficiente dire che $deg(\bar{v}_{|\partial B(p,\varepsilon)}) = degN$ e questo è vero poiché le due mappe sono omotope attraverso l'omotopia $H(q, t) = \frac{t\bar{v}(q) + (1-t)N(q)}{\|t\bar{v}(q) + (1-t)N(q)\|}$: è una buona definizione perché il denominatore è sempre non nullo grazie al fatto che N e $\bar{v}$ sono entrambi campi uscenti e il denominatore ne è una combinazione convessa. Abbiamo dimostrato che in questo caso la somma degli indici non dipende dal campo vettoriale.

Definizione 4.14 *Sia $M \subseteq \mathbb{R}^N$ varietà senza bordo. Il **fibrato normale** di M è $N(M) = \{(p, v) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^n | p \in M, v \in N_p(M) = T_p(M)^\perp\} \subseteq \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N = \mathbb{R}^{2N}$*

Teorema 4.1.5 *$N(M)$ è una N-varietà.*

Dimostrazione: Sia $k = N - n$ la codimensione (dove $n = dimM$). Se U è aperto di M, allora $N(U) = (U \times \mathbb{R}^N) \cap N(M)$ è aperto in $N(M) \subseteq M \times \mathbb{R}^N \subseteq \mathbb{R}^{2N}$. Dunque è sufficiente mostrare che se $\varphi : \Omega \to U$ è una parametrizzazione locale per M ($\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$), allora $N(U)$ è diffeomorfo a $\mathbb{R}^N$. A meno di restringere U, possiamo costruire un frame tangente ortonormale $v_1, ..., v_n : U \to \mathbb{R}^N$ (ad esempio è sufficiente ortonormalizzare il frame associato a φ. Dato $p \in U$, completo $v_1(p), ..., v_n(p)$ a base ortonormale $v_1(q), ..., v_n(q), w_1), ..., w_k$ di $\mathbb{R}^N$. Automaticamente $w_1, ..., w_k$ è base ortonormale di $N_p(M)$. Poiché la funzione $q \mapsto det(v_1(q), ..., v_n(q), w_1, ..., w_k)$ è continua, a meno di restringere U $(v_1(q), ..., v_n(q), w_1(q), ..., w_k(q))$ è base di $\mathbb{R}^N$ per ogni $q \in U$. Ora, grazie all'algoritmo di Gramm-Schimdt ortonormalizzo questa base (è una operazione C^∞) ottenendo una base ortonormale di $\mathbb{R}^N$ per ogni q. Ho così ottenuto un frame normale ortonormale C^∞ $w_1, ..., w_k : U \to \mathbb{R}^N$ in modo che $w_1(q), ..., w_k(q)$ è base ortonormale di $N_q(M)$ per ogni $q \in U$. Poniamo adesso $\psi : \Omega \times \mathbb{R}^K \to N(U)$ con $\psi(x, a_1, ..., a_k) = (\varphi(x), a_1 w_1(\varphi(x)) + ... + a_k w_k(\varphi(x)))$. Questa è una mappa C^∞ bigettiva per costruzione. Scriviamo ψ^{-1}: $\psi^{-1} : N(U) \to \Omega \times \mathbb{R}^k$ tale che $\psi^{-1}(q, v) = (\varphi^{-1}(q), < v, w_1(q) >, ..., < v, w_k(q) >)$. Poiché $\Omega \times \mathbb{R}^k$ è aperto in $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k = \mathbb{R}^N$ questo conclude la dimostrazione.

Lemma 4.1.6 *Sia $M \subseteq \mathbb{R}^N$ una varietà senza bordo e sia $q \in \mathbb{R}^N$; se $p \in M$ è tale che $d(p,q) = d(M,q) = inf\{d(p',q)|p' \in M\}$, allora $q - p \in N_p(M)$*

Dimostrazione: Essendo un minimo assoluto, p è un punto critico della funzione $f : M \to \mathbb{R}$ tale che $f(x) = \|x - q\|^2$ il cui differenziale è $df_p(v) = 2 < v, p - q >$ che deve essere nullo per ogni $v \in T_p(M)$ e questo è vero se $p - q \in T_p(M)^\perp = N_p(M)$ che è la tesi.

Definizione 4.15 *$\forall \varepsilon > 0$ definiamo $N_\varepsilon(M) = \{(p,v) \in N(M)|\|v\| < \varepsilon\}$ che è un aperto di $N(M)$ e definiamo anche $U_\varepsilon(M) = \{q \in \mathbb{R}^N|d(q,M) < \varepsilon\}$ che è un aperto di $\mathbb{R}^N$*

Definizione 4.16 *Definiamo $\theta : N_\varepsilon(M) \to U_\varepsilon(M)$ tale che $\theta(p,v) = p + v$. Questa è una buona definizione in quanto $d(p + v, M) \leq d(p + v, p) = \|v\|$*

Teorema 4.1.7 *Sia M una varietà compatta senza bordo, allora $\exists\varepsilon$ tale che:*

1. *$\theta : N_\varepsilon(M) \to U_\varepsilon(M)$ è diffeomorfismo;*
2. *$\forall q \in U_\varepsilon(M)$ esiste unico $r(q) \in M$ tale che $d(q,M) = d(q, r(q))$;*
3. *$r : U_\varepsilon(M) \to M$ è una funzione C^∞ (retrazione);*
4. *$\overline{U_{\frac{\varepsilon}{2}}(M)}$ è una N varietà con bordo la cui normale esterna è $\frac{q-r(q)}{\|q-r(q)\|}$*

Dimostrazione:

1 θ è un diffeomorfismo locale per ogni $(p,0) \in N(M)$: se $i : M \to M \times \{0\} \subseteq N(M)$ e $j : N_p(M) \to \{p\} \times N_p(M) \subseteq N(M)$ sono le inclusioni, allora $\theta \circ i(q) = \theta(q,0) = q$ e $\theta \circ j(v) = \theta(p,v) = p + v$ Per cui $Im(d\theta_{(p,0)}) \supseteq Im(\theta \circ i)_p = T_p(M)$ e inoltre $Im(d\theta_{(p,0)}) \supseteq Im(\theta \circ j)_0 = N_p(M)$. Pertanto $Im(d\theta_{(p,0)}) \supseteq T_p(M) \bigoplus N_p(M) = \mathbb{R}^N$ per cui $d\theta_{(p,0)}$ è invertibile per motivi dimensionali. Dunque $d\theta_{(p,0)}$ è invertibile per ogni $p \in M$ e, per compattezza di M, $d\theta_{(p,v)}$ è invertibile per ogni $(p,v) \in N_\varepsilon(M)$, purché ε sia abbastanza piccolo. Dimostriamo adesso che a meno di restringere ε $\theta : N_\varepsilon(M) \to U_\varepsilon(M)$ è diffeomorfismo. Essendo diffeomorfismo locale basta mostrare la bigettività. Suriettività: sia $q \in U_\varepsilon(M)$: per compattezza esiste $p \in M$ di minima distanza da q e dunque $\|q-p\| = d(q,M) < \varepsilon$. Per il lemma appena dimostrato, $q-p = v \in N_p(M)$, dunque $(p,v) = (p, q-p) \in N_\varepsilon(M)$ e $\theta(p, q-p) = q$ e dunque la suriettività ce l'abbiamo. Iniettività: se non esistesse $\varepsilon > 0$ tale che $\theta_{|N_\varepsilon(M)}$ sia iniettiva, allora esisterebbero successioni $(p_n, v_n) \in N(M)$ e $(p'_n, v'_n) \in N(M)$ distinte con (p_n, v_n) e $(p'_n, v'_n) \in N_{\frac{1}{n}}(M)$ e $\theta(p_n, v_n) = \theta(p'_n, v'_n)$. Per compattezza di M, posso supporre che $p_n \to \bar{p} \in M$, $p'_n \to \bar{p'} \in M$. Inoltre $\|v_n\| < \frac{1}{n}$ e dunque $v_n \to 0$ e anche $v'_n \to 0$. Dunque $\bar{p} = \bar{p} + 0 = \lim(p_n + v_n) = \lim(\theta(p_n, v_n)) = \lim(\theta(p'_n, v'_n)) = \lim(p'_n + v'_n) = \bar{p'} + 0 = \bar{p'}$. Quindi $\bar{p} = \bar{p'}$ e (p_n, v_n) e (p'_n, v'_n) vivono definitivamente in un intorno di $(\bar{p}, 0) = (\bar{p'}, 0)$ su cui θ è iniettiva (θ è localmente diffeomorfismo, dunque θ è localmente iniettiva). Pertanto difinitivamente vale che $(p_n, v_n) = (p'_n, v'_n)$ che contraddice l'ipotesi di assurdo;

2-3 Dato $q \in U_\varepsilon(M)$, mostriamo che il punto di minima distanza è unico: se $p \in M$ è tale che $d(p,q) = d(M,q)$ allora, per il lemma, $q - p \in N_p(M)$ e $\|q - p\| = d(q,M) > \varepsilon$. Dunque $(p, q-p) \in N_\varepsilon(M)$ e inoltre $\theta(p, q-p) = p$. Vale quindi che $(p, q-p) = \theta^{-1}(q)$ e $p = \pi_M(\theta^{-1}(q))$ dove $\pi_M : N(M) \to M$ è tale che $(p,a) \mapsto p$. Dunque se c'è un punto di minima distanza questo è unico e questo punto c'è per compattezza di M. Dunque p è l'unico punto di minima distanza da q e $r : U_\varepsilon \to M$ è data da $r = \pi_M \circ \theta^{-1}$ che è anche una funzione C^∞;

4 Sia adesso R tale che $0 < R < \varepsilon$, allora $\overline{U_R(M)} = \{q \in U_\varepsilon(M) | d(q.M) \leq R\} = \{q \in U_\varepsilon(M) | \|q - r(q)\| \leq R^2\}$. Per mostrare che $\overline{U_R(M)}$ è una varietà con bordo basta mostrare che R^2 è un valore regolare per $f : U_\varepsilon(M) \to \mathbb{R}$ tale che $f(q) =< q - r(q), q - r(q) >$. Dato $q \in f^{-1}(R^2)$, $df_q(v) = 2 < q - r(q), v - dr_q(v) >$. Adesso, per il lemma, $q - r(q) \in N_{r(q)}(M)$ e inoltre sappiamo anche che $dr_q(v) \in T_{r(q)}(M)$: otteniamo quindi $df_q = 2 < q - r(q), v >$ e $q - r(q) \neq 0 \Rightarrow df_q : T_q(U_\varepsilon(M)) \to \mathbb{R}$ è suriettivo. Inoltre sappiamo anche chi è $ker(df_q)$ e questo è $(q - r(q))^\perp$. Questo mostra che R^2 è regolare per f, perciò $\overline{U_R(M)}$ è una varietà con bordo e $T_q(\partial \overline{U_R(M)} = ker(df_q) = (q - r(q))^\perp$. Per cui una normale uscente in q è proprio $\frac{q - r(q)}{\|q - r(q)\|}$.

Teorema 4.1.8 (di Poincaré-Hopf) *Sia M una varietà senza bordo, compatta, $M \subseteq \mathbb{R}^N$; sia $v \in \mathcal{T}(M)$ con zeri isolati. Allora $\sum_{v(p)=0} i_p(v)$ non dipende da v, ma solo da M. In effetti $\sum_{v(p)=0} i_p(v) = degN$ dove $N : \partial \overline{U_\varepsilon(M)} \to S^{n-1}$ è la normale uscente da un intorno tubolare di M*

Dimostrazione: Dimostriamo il teorema assumendo che gli zeri siano non degeneri. Dato $v \in \mathcal{T}(M)$ costruiamo $\bar{v} \in \mathcal{T}(\overline{U_\varepsilon(M)})$ in questo modo: $\bar{v}(q) = v(r(q)) + q - r(q)$: questo è un campo C^∞ perché composizione di funzioni C^∞. Se $q \in M \Rightarrow r(q) = q \Rightarrow \bar{v}(q) = v(q)$. Se $q \in \overline{U_\varepsilon(M)}$ è uno zero di $\bar{v}$, allora $0 = v(r(q)) + q - r(q)$, ma $v(r(q)) \in T_{r_q}(M)$ mentre $q - r(q) \in N_{r_q}(M) \Rightarrow v(r(q)) = 0$ e anche $q - r(q) = 0$ perché sono in somma diretta. Dalla seconda si ottiene che $q = r(q)$ e dunque $q \in M$ e mettendolo nella prima si ha $v(r(q)) = v(q) = 0 \Rightarrow q$ è zero anche del campo di partenza. Dunque gli zeri di $\bar{v}$ e di v coincidono. Dobbiamo mostrare che il campo $\bar{v}$ è uscente da $\overline{U_\varepsilon(M)}$: lo è in quanto per ogni $q \in \partial U_\varepsilon(M)$, vale $< \bar{v}(q), N(q) >=< v(r(q)) + q - r(q), \frac{q - r(q)}{\|q - r(q)\|} = \|q - r(q)\| > 0$ e dunque è uscente. Per il lemma di Hopf, si ha

$$\sum_{v(p)=0} i_p(\bar{v}) = \sum_{\bar{v}(p)=0} i_p(\bar{v}) = degN$$

Per cui resta solo da mostrare che $i_p(v) = i_p(\bar{v})$ per ogni $p \in M$ zero di v. p è non degenere per v e dunque $dv_p : T_p(M) \to T_p(M)$ ha determinante maggiore di 0. Poiché $\bar{v}_{|M} = v$ e $(d\bar{v}_p)_{|T_p(M)} = dv_p$, manca solamente il normale. Se $w \in N_p(M)$, se $\gamma(t) = p + tw$, per definizione vale che: $d\bar{v}_p(w) = \frac{d}{dt}\bar{v}(\gamma(t)) = \frac{d}{dt}\bar{v}(p+tw) = \frac{d}{dt}(v(r(p+tw)) + p + tw - r(p+tw))$, ma $r(p+tw) = p$ per ogni t poiché parto sempre in direzione normale (formalmente: $r(p+tw) = \pi_M(\theta^{-1}(p+tw)) = \pi_M(p+tw) = p)$ e adesso $\frac{d}{dt}(v(p) + p + tw - p) = w$. Perciò rispetto all'unione di una base di $T_p(M)$ e una di $N_p(M)$ vale che $d\bar{v}_p = \begin{bmatrix} dv_p & 0 \\ 0 & Id \end{bmatrix}$. Dunque vale che $i_p(\bar{v}) = sgn(detd\bar{v}_p) = sgn(detdv_p) = i_p(v)$ che è la tesi.

FATTO: In realtà nelle ipotesi di Poincaré-Hopf,

$$\sum_{v(p)=0} i_p(v) = \chi(M) = \sum_{i=0}^{dimM} (-1)^i \#\{\text{i simplessi in una triangolazione di M}\}$$

dove un i simplesso è fatta da $i + 1$ punti.
In dimensione 2, data una triangolazione costruisco $v \in \mathcal{T}(M)$ come nel disegno.
Questa costruzione è estendibile a tutto M (sono cioè fatte in modo coerente). Data T costruisco un campo w con V sorgenti (vertici), E selle (lati), F pozzi (facce) e dunque $\sum_{w(p)} i_p(w) = V - E + F = \chi(S)$

Corollario 4.1.9 *Sia M come sopra; M è pettinabile, allora $\chi(M) = 0$*

Dimostrazione: ovvia conseguenza?

Dunque se $\chi(M) \neq 0$, allora M non ha campi mai nulli.

Corollario 4.1.10 *Sia Σ superficie compatta orientabile con $\partial M \neq \emptyset$. Allora Σ è pettinabile se e solo se è diffeomorfo al toro.*

Dimostrazione: $0 = \chi(\Sigma_g) = 2 - 2g \Leftrightarrow g = 1$

FOLKLORE: In realtà M compatta senza bordo è pettinabile se e solo se $\chi(M) = 0$.